A helyvektorok használata

A HARMADOLÓPONT ÉS A SÚLYPONT KOORDINÁTÁI

1. feladat

Tudjuk, hogy ha az *ABC* háromszög csúcsai $A(-11; 5)$, $B(-1; -4)$, $C(0; 8)$, akkor a háromszög súlypontja a $(-4;\ 3)$ pont. Érdekes, hogy ha az *ABC* háromszög oldalfelező pontjai által alkotott *A′B′C′* háromszög súlypontját is meghatározzuk, akkor azt tapasztaljuk, hogy az is éppen a $(-4;\ 3)$ pont.

Ez az egybeesés lehet véletlen, de lehet, hogy más esetekben is igaznak bizonyul.

a) Kísérletezzünk más háromszögekkel is.

A kísérletezéshez használjuk a GeoGebra programot, amit megtalálunk a *www.geogebra.org* honlapon. Futtathatjuk böngészőben, de telepíthetjük a gépünkre is.
A kísérletezéshez használjuk a GeoGebra fájlt is, amelyet csatoltunk (sulypont.ggb).
(Az animációban a jelölő négyzetek segítségével tudunk több vagy kevesebb olyan információt megjeleníteni, amelyek segítenek a gondolkodásban. A háromszög csúcsait egérrel megfogva azokat szabadon áthelyezhetjük, a csúcsok koordinátái az áthelyezéssel szinkronban megváltoznak.)

Kétféle válasz képzelhető el:

1. Minden esetben igaz, hogy a két háromszög súlypontja egybeesik.

   vagy

2. Nem minden esetben igaz, hogy a két háromszög súlypontja egybeesik.

b) Vajon hány konkrét háromszöget kell megvizsgálni, ha a sejtésünket – miszerint, a két háromszög súlypontja egybeesik – be akarjuk bizonyítani?

Ha azt akarjuk bizonyítani, hogy a két háromszög súlypontja azonos, akkor végtelen sok esetet kell vizsgálnunk.

Ha azt akarjuk bizonyítani, hogy a két háromszög súlypontja nem mindig azonos, akkor elég egy olyan háromszöget találni, amelyre a két súlypont valóban különböző.

c) Bebizonyítjuk a sejtésünket.

Ha azt akarjuk igazolni, hogy az állítás minden háromszög esetében igaz, akkor a konkrét számok helyett betűket kell használnunk.

Legyenek az *ABC* háromszög csúcsai $A(a_1;\ a_2)$, $B(b_1;\ b_2)$ és $C(c_1;\ c_2)$. Ekkor az *ABC* háromszög súlypontja:

$$S_{ABC}\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

Az *ABC* háromszög oldalfelező pontjai (*A’, B’, C’*):

$$A'\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2}\right),\ B'\left(\frac{a_1+c_1}{2};\frac{a_2+c_2}{2}\right)\text{ és }C'\left(\frac{c_1+b_1}{2};\frac{c_2+b_2}{2}\right)$$

Ezek tehát a kisebb *A’B’C’* háromszög csúcsai. Már csak azt kell felírni, hogy melyik pont ennek a kisebb háromszögnek a súlypontja (jelöljük $S_{A'B'C'}$-vel), és máris kiderül, hogy ez megegyezik-e az *ABC* háromszög súlypontjával.

$$\boldsymbol{S_{A'B'C'}}\left(\frac{\frac{a_1+b_1}{2}+\frac{a_1+c_1}{2}+\frac{c_1+b_1}{2}}{3};\frac{\frac{a_2+b_2}{2}+\frac{a_2+c_2}{2}+\frac{c_2+b_2}{2}}{3}\right)=$$

$$=S_{A'B'C'}\left(\frac{\frac{a_1+b_1+a_1+c_1+c_1+b_1}{2}}{3};\frac{\frac{a_2+b_2+a_2+c_2+c_2+b_2}{2}}{3}\right)=$$

$$=S_{A'B'C'}\left(\frac{\frac{2\cdot a_1+2\cdot b_1+2\cdot c_1}{2}}{3};\frac{\frac{2\cdot a_2+2\cdot b_2+2\cdot c_2}{2}}{3}\right)=$$

$$=S_{A'B'C'}\left(\frac{\frac{2\cdot(a_1+b_1+c_1)}{2}}{3};\frac{\frac{2\cdot(a_2+b_2+c_2)}{2}}{3}\right)=$$

$$=S_{A'B'C'}\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)\equiv \boldsymbol{S_{ABC}\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)}$$

Tehát:

$$\boldsymbol{S_{A'B'C'}\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)\equiv S_{ABC}\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)}$$

Egyszerűbben:

$$\boldsymbol{S_{ABC}\equiv S_{A'B'C'}}$$

Tehát, az *ABC* háromszög és a háromszög oldalfelező pontjai által alkotott *A'B'C'* háromszög súlypontjai egybeesnek.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a sejtésünk igaz.