Helyvektor, szakasz felezőpontja

1. feladat

Az *AVBS* négyszög *V* csúcsának helyvektora $\mathbf{v}(4; 3)$, *S* csúcsának helyvektora $\mathbf{s}(-7; 5)$, két további csúcsa pedig $A(-2; 2)$ és $B(-1; 6)$.

Megmutatjuk, hogy az *AVBS* négyszög paralelogramma.

1. bizonyítás:

A *VS* szakasz felezőpontja az *F* pont:

$$F\left(\frac{4+(-7)}{2}; \frac{3+5}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}; \frac{8}{2}\right) = (-1{,}5;\ 4)$$

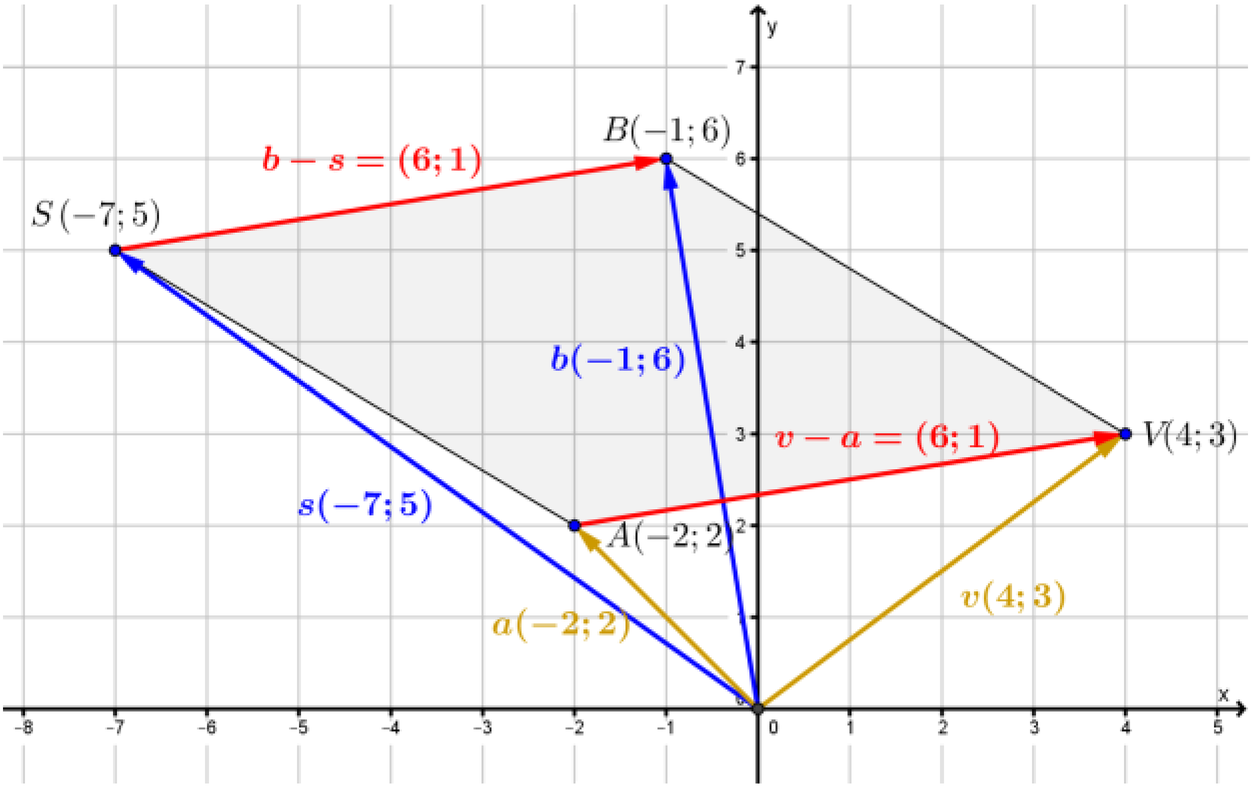
Az *AB* szakasz felezőpontja a *G pont*:

$$G\left(\frac{-2+(-1)}{2}; \frac{2+6}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}; \frac{8}{2}\right) = (-1{,}5; 4)$$

A két felezőpont (*F* és *G*) megegyezik, a négyszög átlói tehát kölcsönösen felezik egymást.

Ez azt jelenti, hogy az *AVBS* négyszög valóban paralelogramma.
(A négyszöget az átlók metszéspontjára tükrözve a négyszög önmagába megy át, vagyis középpontosan szimmetrikus, így tehát paralelogramma.)

2. bizonyítás:



Az *AVBS* négyszög $\overrightarrow{SB}$ oldalvektorának koordinátái kiszámíthatók a csúcsokba mutató helyvektorok koordinátáinak segítségével:

$$\overrightarrow{SB} = \mathbf{b} - \mathbf{s} = (-1;6) - (-7;5) = (6;1)$$

Hasonlóképpen, az $\overrightarrow{AV}$ oldalvektor:

$$\overrightarrow{AV} = \mathbf{v} - \mathbf{a} = (4;3) - (-2;2) = (6;1)$$

A két oldalvektor egyenlő, tehát a négyszög *SB* oldala párhuzamos az *AV* oldallal, és a hosszuk is egyenlő.

Az *AVBS* négyszög tehát valóban paralelogramma.
(Ha egy négyszög két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő hosszú, akkor a négyszög paralelogramma.)

3. bizonyítás:

A négyszög mindegyik oldalának hosszát kiszámolhatjuk a Pitagorasz-tétellel:

$$SB = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{36 + 1} = \sqrt{37} = AV$$

és

$$AS = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} = BV$$

A négyszög tehát valóban paralelogramma.
(Ha egy négyszög két-két szemközti oldala egyenlő hosszú, akkor a négyszög paralelogramma.)