Trigonometrikus egyenletek megoldása

SEGÍTENEK AZ AZONOSSÁGOK!

1. feladat

A valós számok halmazán megoldjuk a következő trigonometrikus egyenleteket.

a) $\sin x = 1$

A szinuszfüggvény maximumhelyeit kell megadni:

$$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,} \quad \text{ahol } \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$$

b) $\operatorname{tg} x = -1$

Tudjuk, hogy a $-135°$ tangense éppen -1.
A $-135°$ radiánban kifejezve $\frac{3\pi}{4}$ és a tangensfüggvény periódusa éppen π.

Az összes megoldás tehát:

$$\boldsymbol{x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi,} \quad \text{ahol } \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$$

c) $\cos^2 x - 2 \cdot \cos x = 0$

Szorzattá alakítva: $\cos x \cdot (\cos x - 2) = 0$. Tehát $\cos x = 0$ vagy $\cos x = 2$.

Ez utóbbi nyilván nem lehetséges, ezért az összes megoldást a $\cos x = 0$ egyenlet megoldásai, vagyis a koszinuszfüggvény zérushelyei adják:

$$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi}, \quad \text{ahol } \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$$

d) $\sin^2 x + \sin x - 6 = 0$

Vezessünk be egy új ismeretlent:

$$y = \sin x$$

Ezzel az eredeti egyenlet így írható fel:

$$y^2 + y - 6 = 0$$

Ezt a másodfokú egyenletet megoldóképlettel megoldva kapjuk:

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$y_1 = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad \text{és} \qquad y_2 = \frac{-1 - 5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Ez azt jelenti, hogy $y_1 = \mathbf{\sin x = 2}$ vagy $y_2 = \mathbf{\sin x = -3}$.

Egyik eset sem lehetséges, tehát **a megadott egyenletnek nincs megoldása.**

2. feladat

Az *1. feladat a)* pontjának megoldásai közül a $[0; 4\pi]$ zárt intervallumba eső megoldások:

$$\frac{\pi}{2} \text{ és } \frac{5\pi}{2}$$

Az *1. feladat b)* pontjának megoldásai közül a $[0; 4\pi]$ zárt intervallumba eső megoldások:

$$\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4} \text{ és } \frac{15\pi}{4}$$

Az *1. feladat c)* pontjának megoldásai közül a $[0; 4\pi]$ zárt intervallumba eső megoldások:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \text{ és } \frac{7\pi}{2}$$

Az *1. feladat d)* pontjának megoldásai közül a $[0; 4\pi]$ zárt intervallumba eső megoldások:

Az *1. feladat d)* pontjának nincs megoldása a valós számok halmazán, ezért a megadott intervallumban sincs.