Trigonometrikus egyenletek

MEKKORA LEHET A SZÖG?

1. feladat

Alapadatok:

A háromszög egyik oldala 6,4 cm, másik oldala 3,2 cm hosszú.
A 3,2 cm hosszú oldallal szemben 30°-os szög van a háromszögben.

Megoldás:

a) A szerkesztési feladat megoldásainak száma:

A szinusztétel szerint (ha a 6,4 cm hosszú oldallal szemközti szöget α-val jelöljük):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 30°}=\frac{6{,}4}{3{,}2}$$

Amiből:

$$\sin\alpha=\frac{6{,}4}{3{,}2}\cdot\sin 30°=2\cdot 0{,}5=1$$

$$\alpha=90°+k\cdot 360° \text{ (ahol, } k\in\mathbb{Z}\text{)}$$

Mivel háromszögről van szó, az α csak 90°-os szög lehet.
A feladatnak tehát egy megoldása van.

b) Kiszámítjuk a háromszög harmadik oldalának hosszát és a szögeit.

Az *1. feladat a)* pontjának megoldásában megállapítottuk, hogy a háromszög derékszögű ($\alpha = 90°$).

A háromszög szögei, tehát 30° (megadva), 90° (az *1. feladat a)* pontjának megoldásában kiszámítva) és ezekből következően a harmadik szög 60°.

A fentebbiek alapján, a háromszög harmadik oldala egy befogó, amelyet Pitagorasz-tétellel célszerű kiszámítani:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Amiből:

$$\boldsymbol{b} = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{6{,}4^2 - 3{,}2^2} = \sqrt{40{,}96 - 10{,}24} = \sqrt{30{,}72} \approx \mathbf{5,54}\ \text{(cm)}$$

A háromszög harmadik oldalának hossza $\approx \mathbf{5,54\ cm}$.

2. feladat

Alapadatok:

A háromszög oldalainak hossza a, b és c, a háromszög szögei α, β és γ.
A háromszög területe T.
Az $a = 5$ cm, $b = 9$ cm és $T = 11{,}25$ cm^2. (A γ szög a c oldallal van szemben.)

Megoldás:

Kiszámítjuk a hiányzó adatokat.

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = 11{,}25$$

$$\frac{5 \cdot 9 \cdot \sin\gamma}{2} = 11{,}25$$

$$45 \cdot \sin\gamma = 22{,}5$$

$$\sin\gamma = \frac{22{,}5}{45} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Két háromszög lehetséges.
Az egyikben $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{30}°$, a másikban $\boldsymbol{\gamma} = 180° - 30° = \mathbf{150}°$.

Koszinusztétellel az első háromszögben $\boldsymbol{c} \approx \mathbf{5,3}$ **cm**, majd szinusztétellel $\boldsymbol{\alpha} \approx \mathbf{28,2}°$ adódik. Végül $\boldsymbol{\beta} \approx 180° - (30° + 28{,}2°) = \mathbf{121,8}°$.

Koszinusztétellel a második háromszögben $\boldsymbol{c} \approx \mathbf{13,6}$ **cm**, majd szinusztétellel $\boldsymbol{\alpha} \approx \mathbf{10,6}°$ adódik. Végül $\boldsymbol{\beta} \approx 180° - (150° + 10{,}6°) = \mathbf{19,4}°$.

3. feladat

Megmutatjuk, hogyan figyelmeztet a koszinusztétel arra, hogy nem szerkeszthető háromszög a 3,2 cm, 5,7 cm és 9 cm hosszú szakaszokból.

Legyen a háromszög legnagyobb szöge γ. A koszinusztétel szerint ekkor:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} = \frac{3{,}2^2 + 5{,}7^2 - 9^2}{2 \cdot 3{,}2 \cdot 5{,}7} = \frac{10{,}24 + 32{,}49 - 81}{36{,}48} = \frac{-38{,}27}{36{,}48} \approx -1{,}0491$$

Nincs olyan szög, amelynek a koszinusza kisebb, mint –1, ezért nem létezik olyan háromszög, amelynek a megadott hosszúságúak az oldalai.