Vegyes feladatok sorozatokra

SZÁMTANI VAGY MÉRTANI?

1. feladat

Bebizonyítjuk, hogy a számtani sorozat bármely tagja (a másodiktól kezdve) a két szomszédos tag számtani közepével egyenlő.

Bizonyítás:

A számtani sorozat 3 egymást követő tagja:

$$a_{n-1}; a_n; a_{n+1}; \qquad (n \geq 2)$$

Azt kell bebizonyítani, hogy (az állítás szerint):

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

A számtani sorozat definíciója szerint:

$$a_{n-1} = a_n - d \quad \text{és} \quad a_{n+1} = a_n + d$$

Az összegük:

$$a_{n-1} + a_{n+1} = a_n - d + a_n + d = 2 \cdot a_n$$

Ezt osztva kettővel:

$$\boldsymbol{\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}} = \frac{2 \cdot a_n}{2} = \boldsymbol{a_n}$$

Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

2. feladat

Bebizonyítjuk, hogy a pozitív tagú mértani sorozat bármely tagja (a másodiktól kezdve) a két szomszédos tag mértani közepével egyenlő.

Bizonyítás:

A mértani sorozat 3 egymást követő tagja:

$$a_{n-1}; a_n; a_{n+1}; \qquad (n \geq 2), \text{pozitív számok}$$

Azt kell bebizonyítani, hogy (az állítás szerint):

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

A mértani sorozat definíciója szerint:

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{q} \quad \text{és} \quad a_{n+1} = a_n \cdot q$$

A szorzatuk:

$$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = \frac{a_n}{q} \cdot a_n \cdot q = {a_n}^2$$

Mindkettő pozitív, ezért négyzetgyököt vonhatunk és mivel a_n is pozitív, nem kell abszolút érték:

$$\sqrt{\boldsymbol{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}} = \sqrt{{a_n}^2} = \boldsymbol{a_n}$$

Ezzel bebizonyítottuk az állítást.