A Pascal-háromszög – Binomiális együtthatók

A binomiális együtthatókat az $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ formulával lehet kiszámolni.
Azt is tudjuk, hogy $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$, $1! = 1$ és $0! = 1$.
Ezeket a képleteket használjuk a következő bizonyításokban!

1. feladat

a) A binomiális együtthatók azon tulajdonságának bizonyítása, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Bizonyítás:

A binomiális együtthatók számítási formulája:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})! \cdot \boldsymbol{k}!} \qquad (1)$$

A formulában k-t helyettesítve $(n-k)$-val kapjuk, hogy

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}} = \frac{n!}{\big(n-(n-k)\big)! \cdot (n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-n+k)! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} =$$

A szorzat tényezői felcserélhetők, tehát:

$$= \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})! \cdot \boldsymbol{k}!} \qquad (2)$$

Az (1) és (2) kifejezések jobb oldala láthatóan azonos, tehát a bal oldala is egyenlő kell, hogy legyen. Ezzel az *a)* állítást bizonyítottuk.

b) A binomiális együtthatók azon tulajdonságának bizonyítása, hogy $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Bizonyítás:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k+1}} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} + \frac{n!}{\big(n-(k+1)\big)!\cdot(k+1)!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!\cdot(k+1)!} =$$

Bővítsük az első törtet $(k+1)$-el, a másodikat pedig $(n-k)$-val!

$$= \frac{(k+1)\cdot n!}{(n-k)!\cdot(k+1)\cdot k!} + \frac{(n-k)\cdot n!}{(n-k)\cdot\big((n-k)-1\big)!\cdot(k+1)!} =$$

$$= \frac{(k+1)\cdot n!}{(n-k)!\cdot(k+1)!} + \frac{(n-k)\cdot n!}{(n-k)!\cdot(k+1)!} =$$

$$= \frac{\big((k+1)+(n-k)\big)\cdot n!}{(n-k)!\cdot(k+1)!} =$$

$$= \frac{(k+1+n-k)\cdot n!}{(n-k)!\cdot(k+1)!} =$$

$$= \frac{(1+n)\cdot n!}{(n-k)!\cdot(k+1)!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{(n-k)!\cdot(k+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-k)!\cdot(k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k-1)!\cdot(k+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{\big((n+1)-(k+1)\big)!\cdot(k+1)!} = \binom{\boldsymbol{n+1}}{\boldsymbol{k+1}}$$

Ezzel a *b)* állítást bebizonyítottuk.