Nevezetes tételek a derékszögű háromszögben

PITAGORASZON TÚL

1. feladat

A derékszögű háromszög átfogóját a hozzá tartozó magasság 1:3 arányban osztja két részre. A háromszög rövidebbik befogója 4 cm.

a) A háromszög átfogójának kiszámítása:

Az átfogót a magasság 1:3 arányban osztja. Ezért:

$$\mathrm{p} = x$$
$$q = 3x$$
$$c = p + q = 4x$$

Írjuk fel a befogótételt!

$$\mathrm{b} = \sqrt{\mathrm{c} \cdot \mathrm{p}}$$

$$4 = \sqrt{4x \cdot x}$$

$$16 = 4x^2$$
$$4 = x^2$$
$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x_{1,2} = \pm 2$$

A feladat szövege alapján a megoldás nem lehet negatív, ezért:

$$x = 2$$

Így a háromszög átfogója:

$$\mathbf{c} = 4x = 4 \cdot 2 = \mathbf{8}$$

A háromszög átfogója 8 cm.

b) A háromszög harmadik oldalának kiszámítása:

A harmadik oldalt Pitagorasz-tétellel számoljuk ki.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Behelyettesítjük az ismert és a feladat *a)* pontjában kiszámított értékeket, majd megoldjuk az egyenletet.

$$a^2 + 4^2 = 8^2$$
$$a^2 + 16 = 64$$

$$a = \pm\sqrt{48}$$

$$a_{1,2} \approx \pm 6{,}93$$

A feladat szövege alapján a megoldás nem lehet negatív, ezért

$$\mathbf{a \approx 6,93}$$

A háromszög harmadik oldala (másik befogója) ≈6,93 cm.

c) A háromszög átfogóhoz tartozó magassága:

A feladat *a)* pontja alapján:

$$p = x = 2$$

Az magasságot magasságtétellel számoljuk ki, melybe beírva és értékét:

$$m = \sqrt{p \cdot q}$$

$$m = \sqrt{2 \cdot 6}$$
$$m = \sqrt{12}$$

$$\mathbf{m \approx 3,46}$$

A háromszög átfogóhoz tartozó magassága ≈3,46 cm.

2. feladat

A feladat megoldása során megszerkesztünk egy $\sqrt{12}$ cm hosszúságú szakaszt.

Megoldás:

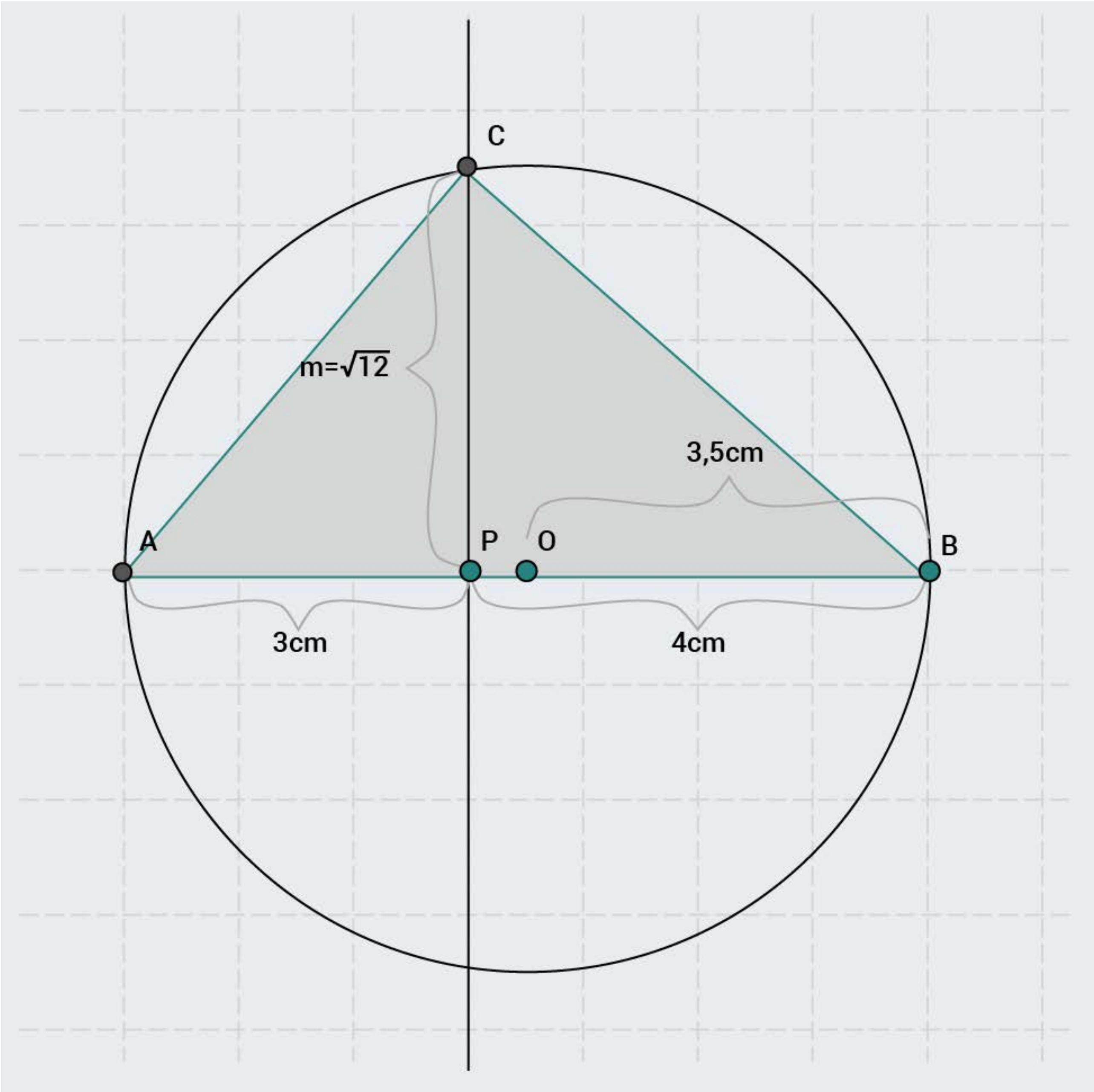
Használjuk fel a magasságtételt!$\sqrt{12} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{4}$

Egy olyan **derékszögű háromszöget kell szerkesztenünk**, aminek **átfogója** 3+4=**7 cm** hosszú, és **az átfogó két szelete 3 cm**, illetve **4 cm**.
Ennek **a háromszögnek az átfogóhoz tartozó magassága** – a magasságtétel alapján – $\mathbf{\sqrt{12}}$ **cm**.

A szerkesztés lépései:

1. Vegyünk fel egymás mellé egy 3 cm és egy 4 cm hosszú szakaszt!
   Az így kapott 7 cm-es szakasz a háromszög átfogója.
2. Szerkesszünk merőlegest a két szakasz közös (P) pontjába!
3. Felezzük el a 7 cm-es szakaszt, és rajzoljunk a felezőpontból (O pont) egy 3,5 cm sugarú kört!
4. A szerkesztendő derékszögű háromszög harmadik csúcsa (C) a kör és a merőleges egyenes metszéspontja.
5. Az átfogóhoz tartozó **m** magasság hossza $\sqrt{12}$ cm.

A szerkesztés:



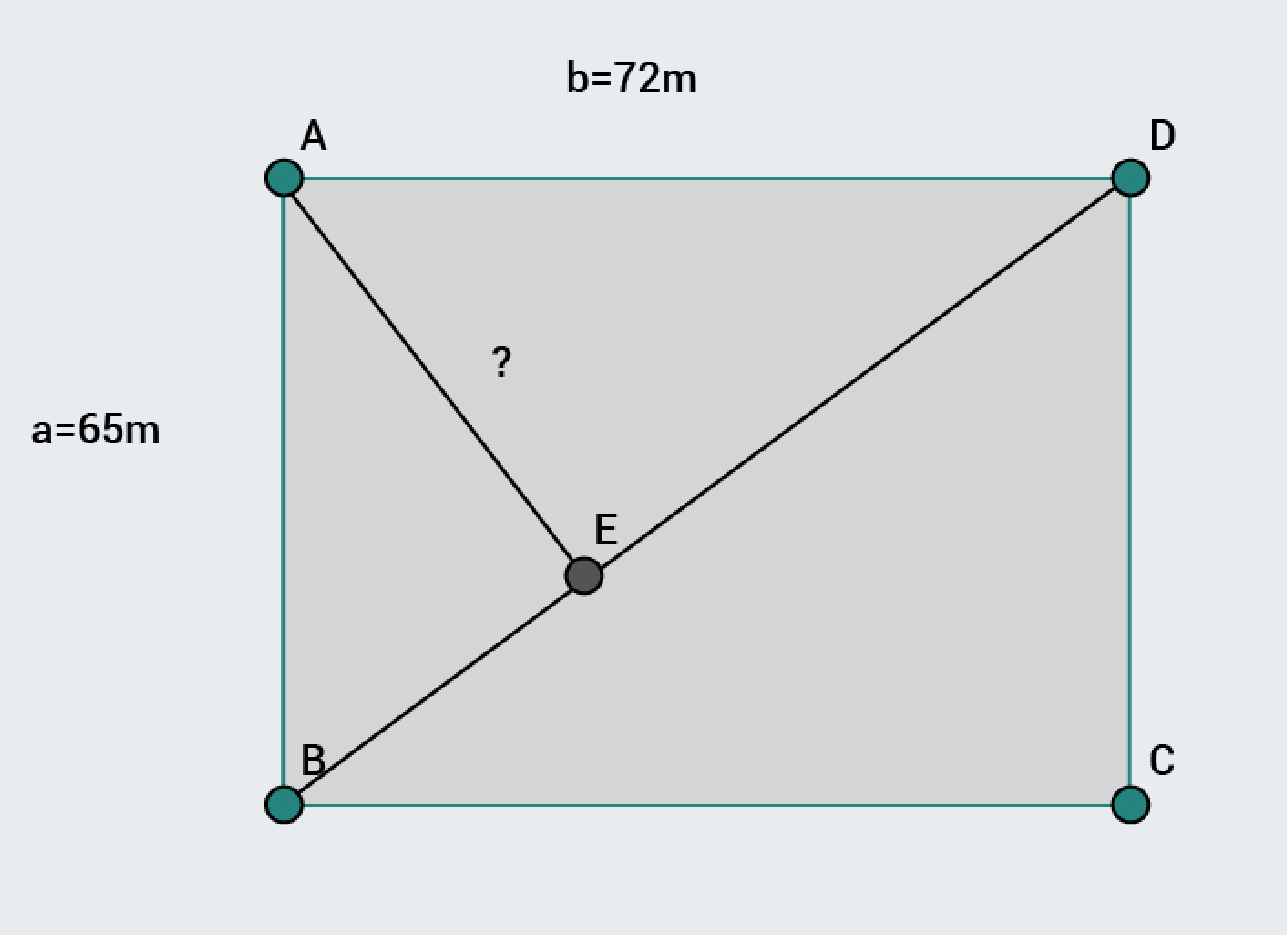
A szerkesztett derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága (m) adja a kívánt $\sqrt{12}$ cm hosszúságú szakaszt.

3. feladat

A feladat megoldása során kiszámítjuk egy téglalap alakú 65 méter és 72 méter oldalhosszúságú park két átellenes csúcsán keresztül vezető egyenes út másik két saroktól való távolságát.

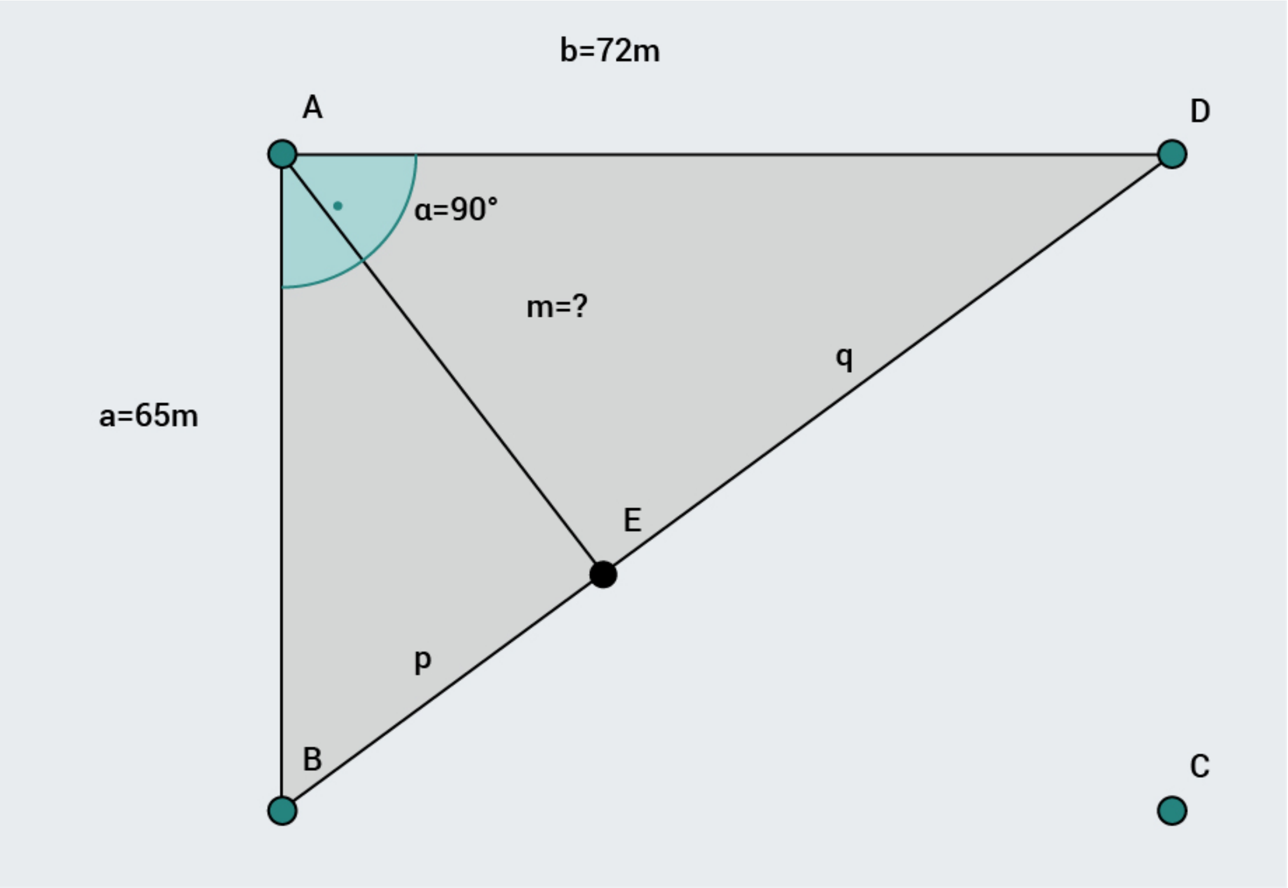
Megoldás:

Rajzoljuk fel a parkot, illetve a kérdéses legrövidebb utat!



Az ábráról látható, hogy az ABD derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasságának a hosszát keressük.

Használjuk a befogó- és magasságtételeket!



Mivel $m = \sqrt{p \cdot q}$, ezért először számoljuk ki p és q értékét, amihez szükségünk lesz az átfogó hosszára is!

Az átfogó (c) kiszámítása Pitagorasz-tétellel:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$65^2 + 72^2 = c^2$$
$$4225 + 5184 = c^2$$
$$c^2 = 9409$$
$$c = \pm\sqrt{9409}$$

$$c_{1,2} = \pm 97$$

A feladat szövege alapján a megoldás nem lehet negatív, ezért:

$$c = 97$$

Az átfogó (c) ismeretében számoljuk ki p és q hosszát!

$$a = \sqrt{c \cdot p}$$

$$p = \frac{a^2}{c} = \frac{65^2}{97} = \frac{4225}{97} \approx 43{,}56$$

$$b = \sqrt{c \cdot q}$$

$$q = \frac{b^2}{c} = \frac{72^2}{97} = \frac{5184}{97} \approx 53{,}44$$

Az átfogó (c) illetve p és q tehát:

$$c = 97 \text{ m}$$
$$p \approx 43{,}56 \text{ m}$$
$$q \approx 53{,}44 \text{ m}$$

Ezek alapján az magasság:

$$m = \sqrt{p \cdot q}$$

$$\mathbf{m} = \sqrt{43{,}56 \cdot 53{,}44} = \sqrt{2327{,}8464} \approx \mathbf{48,25}$$

Tehát 48,25 méter a keresett távolság.