A másodfokú egyenletrendszer

1. feladat

a)

$$\left.\begin{array}{ll} I. & x^2 - 2y = -1 \\ II. & x - y = 0 \end{array}\right\}$$

Behelyettesítő módszer:

A második (*II.*) egyenletből kifejezzük y-t.

$$II. \quad x - y = 0$$
$$y = x$$

Ezután y-t behelyettesítjük az első (*I.*) egyenletbe és rendezzük az egyenletet.

$$I. \quad x^2 - 2x = -1$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Megoldjuk az így kapott másodfokú egyenletet.

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1 \pm 0 = 1$$

$$x_1 = x_2 = 1$$

$x_1 x_2$Ezt az értéket behelyettesítve az y-ra rendezett második (*II.*) egyenletbe megkapjuk y értékét is.

$$y = x$$

$$y = 1$$

Így az egyenletrendszer megoldása: $x = 1; y = 1$.

Egyenlő együtthatók módszere:

$$\left.\begin{array}{lc} \textit{I.} & x^2 - 2y = -1 \\ \textit{II.} & x - y = 0 \end{array}\right\}$$

Megszorozzuk a második (*II.*) egyenletet 2-vel, így az alábbi egyenletet kapjuk:

II.

Kivonjuk az első (*I.*) egyenletből az így kapott második (*II.*) egyenletet és rendezzük.

$$\textit{I.-II.} \qquad x^2 - 2y - (2x - 2y) = -1 - 0$$

$$x^2 - 2y - 2x + 2y = -1$$

$$x^2 - 2x = -1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Megoldjuk az így kapott másodfokú egyenletet.

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1 \pm 0 = 1$$

$$x_1 = x_2 = 1$$

$x_1 x_2$Ezt az értéket behelyettesítve a második (*II.*) egyenletbe megkapjuk y értékét is.

$$1 - y = 0$$

$$y = 1$$

Így az egyenletrendszer megoldása: $x = 1; y = 1$.

Grafikus módszer:

Ábrázoljuk az egyenletek y-ra való rendezésével kapott grafikonokat!

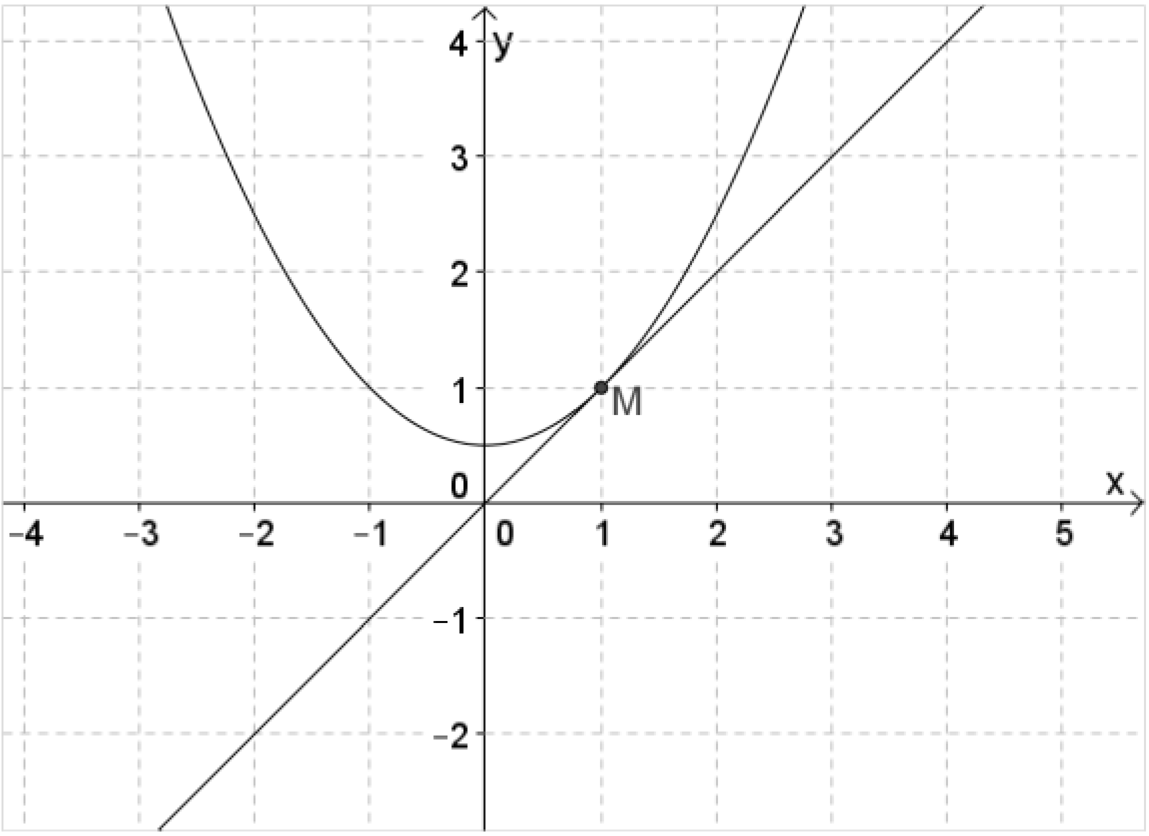
I. $x^2 - 2y = -1$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

II. $x - y = 0$

$$y = x$$

A grafikonok közös pontja, $M(1;\ 1)$ adja az egyenletrendszer megoldását.



A grafikonoknak az $M(1;\ 1)$ a közös pontja. Így az egyenletrendszer megoldása: $x = 1; y = 1$.

Ellenőrzés:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{I.} & \begin{aligned} 1^2 - 2\cdot 1 &= -1 \\ -1 &= -1 \end{aligned} \\ \textit{II.} & \begin{aligned} 1-1 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \end{array}\right\}$$

A megoldás helyes.

b)

$$\left.\begin{array}{ll} I. & x^2 - y = -2 \\ II. & 2x^2 + 2 = y \end{array}\right\}$$

Behelyettesítő módszer:

Az első (*I.*) egyenletből kifejezzük y-t.

$$I. \qquad x^2 - y = -2$$
$$y = x^2 + 2$$

Ezután y-t behelyettesítjük a második (*II.*) egyenletbe és rendezzük az egyenletet.

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Az egyenletnek tehát egy megoldása van. Ezt az értéket behelyettesítve az y-ra rendezett első (*I.*) egyenletbe megkapjuk y értékét is.

$$y = 0^2 + 2$$
$$y = 0 + 2$$

$$y = 2$$

Így az egyenletrendszer megoldása: $x = 0; y = 2$.

Egyenlő együtthatók módszere:

Megszorozzuk az első (*I.*) egyenletet 2-vel:

I. $$x^2 - y = -2$$
$$2x^2 - 2y = -4$$

Kivonjuk az így kapott első (*I.*) egyenletből a második (*II.*) egyenletet.

I.-II. $$2x^2 - 2y - (2x^2 + 2) = -4 - y$$
$$2x^2 - 2y - 2x^2 - 2 = -4 - y$$
$$-2y - 2 = -4 - y$$
$$-y = -2$$

$$y = 2$$

Ezt az értéket behelyettesítve az első (*I.*) egyenletbe megkapjuk x értékét is.

I. $$x^2 - 2 = -2$$
$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Így az egyenletrendszer megoldása: $x = 0; y = 2$.

Grafikus módszer:

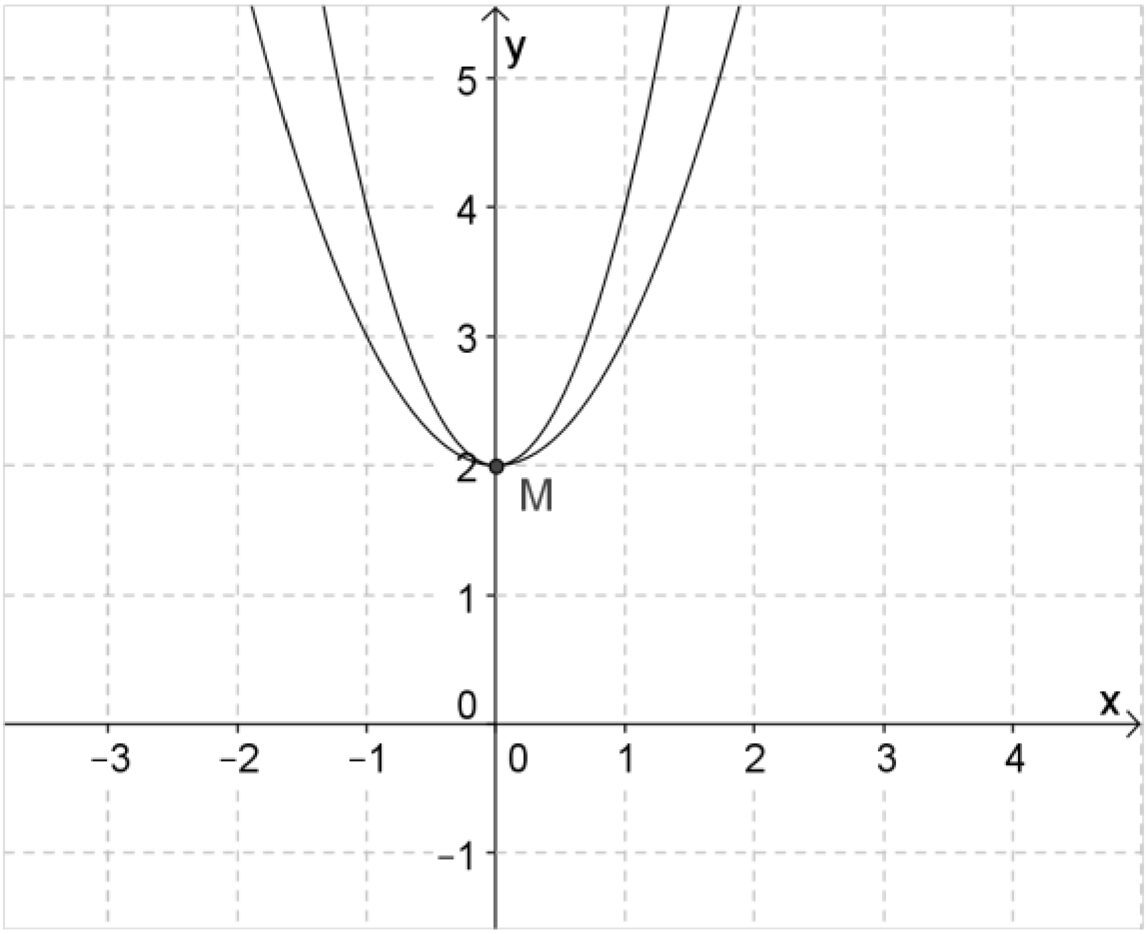
Ábrázoljuk az egyenletek y-ra való rendezésével kapott grafikonokat!

I. $x^2 - y = -2$

$$y = x^2 + 2$$

II. $2x^2 + 2 = y$

$$y = 2x^2 + 2$$



A grafikonoknak az $M(0;\ 2)$ a közös pontja. Így az egyenletrendszer megoldása: $x = 0; y = 2$.

Ellenőrzés:

$$\left.\begin{array}{lr} \textit{I.} & 0^2-2=-2 \\ & -2=-2 \\ \textit{II.} & 2\cdot 0^2+2=2 \\ & 2=2 \end{array}\right\}$$

A megoldás helyes.

2. feladat

a)

$$\left.\begin{array}{lc} \textit{I.} & x - y = 1 \\ \textit{II.} & x \cdot y = 2 \end{array}\right\}$$

A behelyettesítő módszer a legalkalmasabb:

Az első (*I.*) egyenletből kifejezzük x-et.

$$\textit{I.} \qquad x - y = 1$$
$$x = 1 + y$$

Ezután x-et behelyettesítjük a második (*II.*) egyenletbe és rendezzük az egyenletet.

$$\textit{II.} \qquad (1 + y) \cdot y = 2$$
$$y + y^2 = 2$$
$$y^2 + y - 2 = 0$$

Megoldjuk az így kapott másodfokú egyenletet.

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$y_1 = 1; \qquad y_2 = -2$$

Ezeket az értéket behelyettesítve az x-re rendezett első (*I.*) egyenletbe megkapjuk x értékeit is.

$$\textit{I.} \qquad x_1 = 1 + y_1 = 1 + 1 = 2; \qquad x_2 = 1 + y_2 = 1 + (-2) = 1 - 2 = -1$$

$$x_1 = 2; \qquad x_2 = -1$$

Az egyenletrendszer megoldásai tehát az $x_1 = 2;\ y_1 = 1$, illetve az $x_2 = -1;\ y_2 = -2$ számpárok.

Ellenőrzés:

$x_1 = 2;\ y_1 = 1$ megoldás esetén:

$$\left.\begin{array}{lc} I. & \begin{array}{c} 2-1=1 \\ 1=1 \end{array} \\ II. & \begin{array}{c} 2\cdot 1=2 \\ 2=2 \end{array} \end{array}\right\}$$

A megoldás helyes.

$x_1 = -1;\ y_1 = -2$ megoldás esetén:

$$\left.\begin{array}{lc} I. & \begin{array}{c} -1-(-2)=1 \\ -1+2=1 \\ 1=1 \end{array} \\ II. & \begin{array}{c} -1\cdot(-2)=2 \\ 2=2 \end{array} \end{array}\right\}$$

A megoldás helyes.

Az ellenőrzés alapján az egyenletrendszer megoldásai valóban az $x_1 = 2;\ y_1 = 1$, illetve az $x_2 = -1;\ y_2 = -2$ számpárok.

b)

$$\left.\begin{array}{ll} I. & x^2 + y^2 = 20 \\ II. & x^2 - 4y = 8 \end{array}\right\}$$

Az egyenlő együtthatók módszere a legalkalmasabb.

Kivonjuk az első (*I.*) egyenletből a második (*II.*) egyenletet és rendezzük.

I.-II.

$$x^2 + y^2 - (x^2 - 4y) = 20 - 8$$
$$x^2 + y^2 - x^2 + 4y = 20 - 8$$
$$y^2 + 4y = 12$$
$$y^2 + 4y - 12 = 0$$

Megoldjuk az így kapott másodfokú egyenletet.

$$y_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2} = -2 \pm 4$$

$$y_1 = 2; \qquad y_2 = -6$$

Ezeket az értéket behelyettesítve az első (*I.*) egyenletbe megkapjuk x értékeit is.

$y_1 = 2$ esetén:

I.

$$x^2 + 2^2 = 20$$
$$x^2 + 4 = 20$$
$$x^2 = 16$$

$$x_1 = 4; \qquad x_2 = -4$$

$y_1 = -6$ esetén:

I.

$$x^2 + (-6)^2 = 20$$
$$x^2 + 36 = 20$$
$$x^2 = -16$$

Nincs olyan szám, aminek a négyzete negatív, így az $y_1 = -6$ nem vezet megoldásra.

Így az egyenletrendszer megoldásai az $x_1 = 4;\ y_1 = 2$, illetve az $x_2 = -4;\ y_2 = 2$ számpárok.

Ellenőrzés:

$x_1 = 4;\ y_1 = 2$ megoldás esetén:

$$\left.\begin{array}{ll} & 4^2 + 2^2 = 20 \\ I. & 16 + 4 = 20 \\ & 20 = 20 \\ & 4^2 - 4 \cdot 2 = 8 \\ II. & 16 - 8 = 8 \\ & 8 = 8 \end{array}\right\}$$

A megoldás helyes.

$x_1 = -4;\ y_1 = 2$ megoldás esetén:

$$\left.\begin{array}{ll} & (-4)^2 + 2^2 = 20 \\ I. & 16 + 4 = 20 \\ & 20 = 20 \\ & (-4)^2 - 4 \cdot 2 = 8 \\ II. & 16 - 8 = 8 \\ & 8 = 8 \end{array}\right\}$$

A megoldás helyes.

Az ellenőrzés alapján az egyenletrendszer megoldásai valóban az $x_1 = 4;\ y_1 = 2$, illetve az $x_2 = -4;\ y_2 = 2$ számpárok.

c)

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{I.} & x^2 - y^2 = 7 \\ \textit{II.} & x - y = -7 \end{array}\right\}$$

A legkézenfekvőbb a behelyettesítéses módszer lenne, de van ennél egyszerűbb is. Az első egyenlet bal oldalán felismerhető az egyik nevezetes szorzat. Használjuk fel ezt!

I.
$$x^2 - y^2 = 7$$
$$(x - y) \cdot (x + y) = 7$$

A második (*II.*) egyenlet alapján $x - y$ helyére -7 helyettesíthető!

$$-7 \cdot (x + y) = 7$$
$$x + y = -1$$
$$y = -1 - x$$

Ezt a második (*II.*) egyenletbe helyettesítve:

II.
$$x - (-1 - x) = -7$$
$$x + 1 + x = -7$$
$$2x + 1 = -7$$
$$2x = -8$$

$$x = -4$$

Ezt az értéket behelyettesítve az $y = -1 - x$ egyenletbe megkapjuk y értékét is.

$$y = -1 - (-4) = -1 + 4$$

$$y = 3$$

Így az egyenletrendszer megoldása: $x = -4; y = 3$.

Ellenőrzés:

I.
$$(-4)^2 - 3^2 = 7$$
$$16 - 9 = 7$$
$$7 = 7$$

II.
$$-4 - 3 = -7$$
$$-7 = -7$$

A megoldás helyes.