Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszerek

1. feladat

a) Behelyettesítő módszer:

Fejezzük ki y-t az első (*I.*) egyenletből!

$$\text{I.} \qquad \begin{aligned} -x+y&=-1 \\ y&=x-1 \end{aligned}$$

Helyettesítsük be a második (*II.*) egyenletbe és számítsuk ki x értékét!

$$\text{II.} \qquad \begin{aligned} x+(x-1)&=3 \\ 2x-1&=3 \\ 2x&=4 \\ x&=2 \end{aligned}$$

A kapott x értéket írjuk be az y-ra rendezett első (*I.*) egyenletbe! Így megkapjuk y értékét is.

$$y=2-1=1$$

Így az egyenletrendszer megoldása: $x=2;\ y=1$.

b) Egyenlő együtthatók módszere:

Adjuk össze a két egyenletet!

$$\text{I.+II.} \qquad \begin{aligned} -x+y+x+y&=-1+3 \\ 2y&=2 \\ y&=1 \end{aligned}$$

A kapott y értéket a második (*II.*) egyenletbe visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x+1&=3 \\ x&=2 \end{aligned}$$

Így az egyenletrendszer megoldása: $x=2;\ y=1$.

c) Grafikus megoldás:

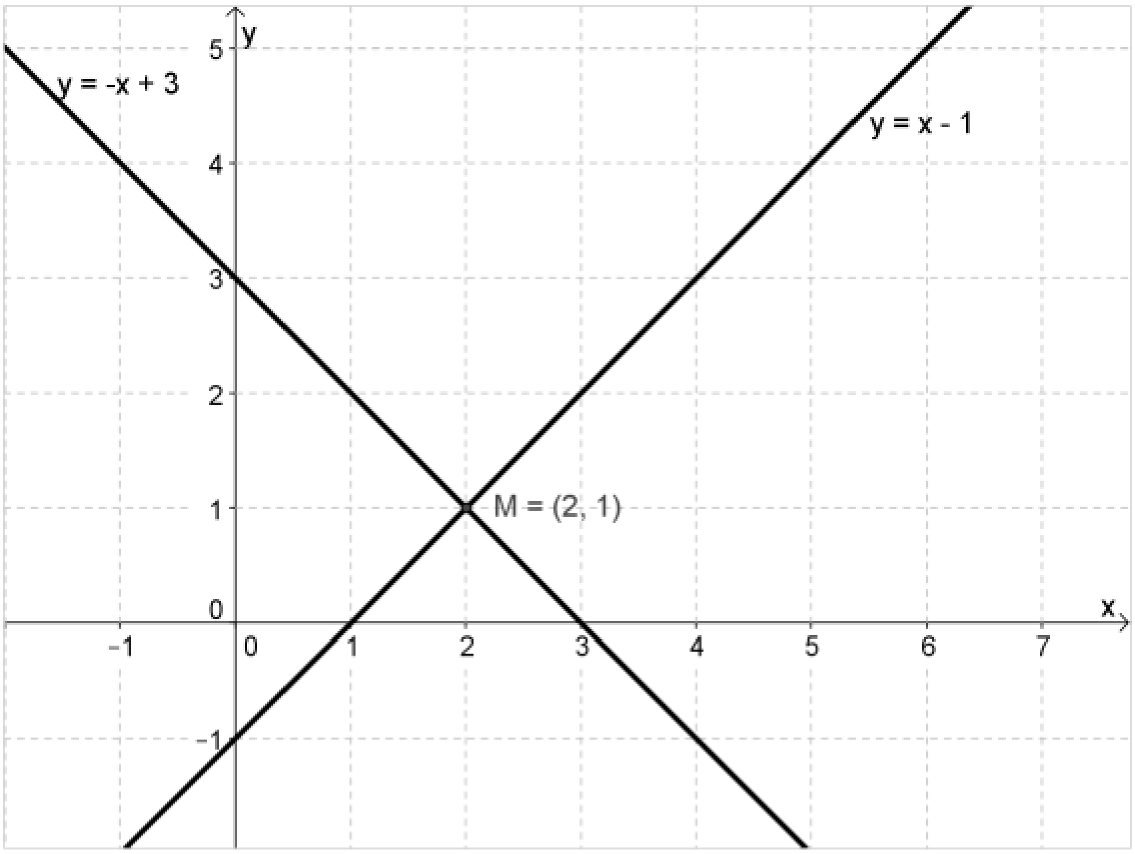
Ábrázoljuk az egyenletek y-ra való rendezésével kapott függvényeket!

I. $-x+y=-1$

$y=x-1$

II. $x+y=3$

$y=-x+3$



A függvények grafikonjai az $M(2,1)$ pontban metszik egymást. Így az egyenletrendszer megoldása: $x=2;\ y=1$, amelyet le kell ellenőrizni.

2. feladat

a) Behelyettesítő módszer:

Fejezzük ki x-et az első (*I.*) egyenletből!

I.
$$x + y = 0$$
$$x = -y$$

Helyettesítsük be a második (*II.*) egyenletbe és számítsuk ki y értékét!

II.
$$-\tfrac{1}{2}(-y) + y = 0$$
$$\frac{3}{2}y = 0$$
$$y = 0$$

A kapott y értéket írjuk be az x-re rendezett első (*I.*) egyenletbe! Így megkapjuk x értékét is.

$$x = -0 = 0$$

Így az egyenletrendszer megoldása: $x = 0;\ y = 0$.

b) Egyenlő együtthatók módszere:

Vonjuk ki az első (*I.*) egyenletből a másodikat (*II.*)!

I.-II.

$$x+y-\left(-\tfrac{1}{2}x+y\right)=0$$
$$\frac{3}{2}x+y-y=0$$
$$\frac{3}{2}x=0$$
$$x=0$$

A kapott x értéket az első (*I.*) egyenletbe visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$0+y=0$$
$$y=0$$

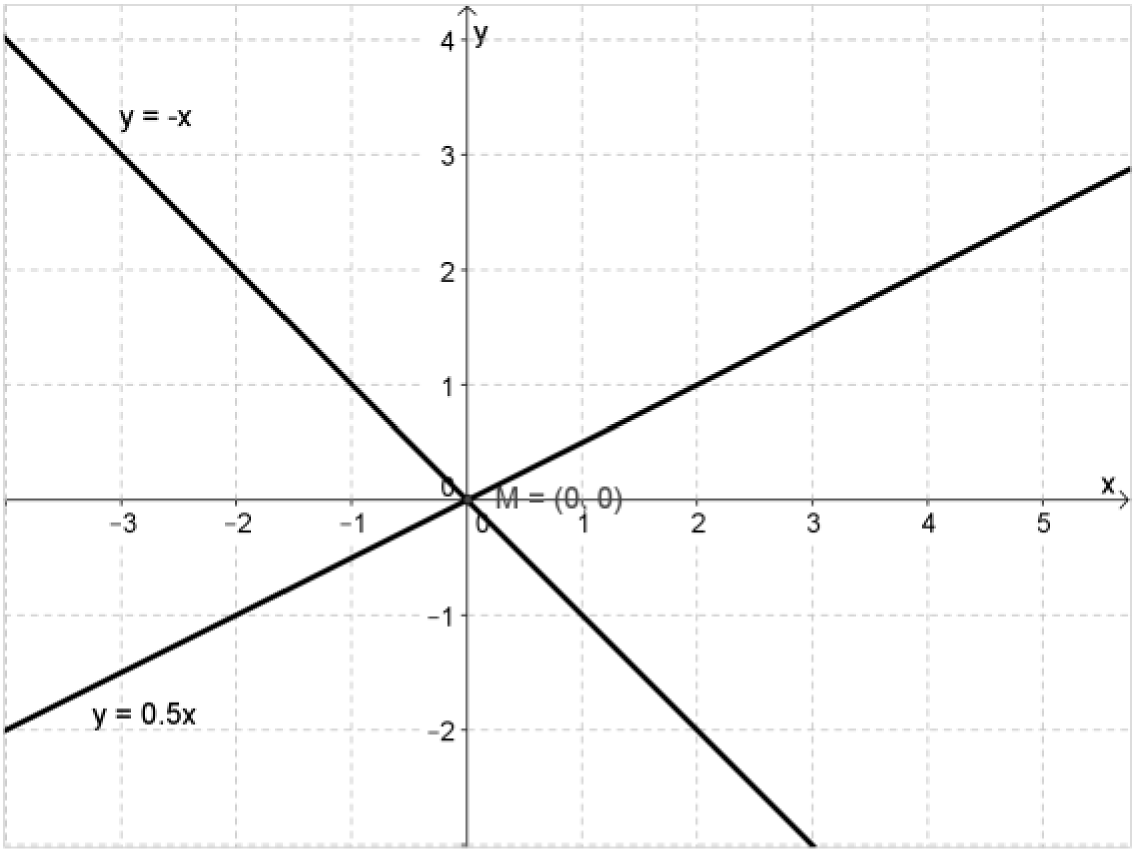
Így az egyenletrendszer megoldása: $x=0;\ y=0$.

c) Grafikus megoldás:

Ábrázoljuk az egyenletek y-ra való rendezésével kapott függvényeket!

I. $$x + y = 0$$
$$y = -x$$

II. $$-\frac{1}{2}x + y = 0$$
$$y = \frac{1}{2}x$$



A függvények grafikonjai az $M(0,0)$ pontban metszik egymást. Így az egyenletrendszer megoldása: $x = 0;\ y = 0$, amelyet le is kell ellenőrizni.

3. feladat

a) Behelyettesítő módszer:

Fejezzük ki x-et a második (*II.*) egyenletből!

II.
$$x + 2y = -2$$
$$x = -2 - 2y$$

Helyettesítsük be az első (*I.*) egyenletbe és számítsuk ki y értékét!

I.
$$\frac{1}{3}(-2 - 2y) + \frac{2}{3}y = -6$$
$$-2 - 2y + 2y = -18$$
$$-2 = -18$$

Hamis állítást kapunk, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.

b) Egyenlő együtthatók módszere:

Az egyenletrendszert úgy kell átalakítani, hogy legyenek benne egyenlő együtthatók. Például az első egyenletet megszorozhatjuk 3-mal.

I.
$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = -6$$
$$x + 2y = -18$$

Vonjuk ki a második (*II.*) egyenletből az imént rendezett elsőt (*I.*)!

II.-I.
$$(x + 2y) - (x + 2y) = -2 - (-18)$$
$$0 = -2 + 18 = 16$$

Ellentmondásra jutunk, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.

c) Grafikus megoldás:

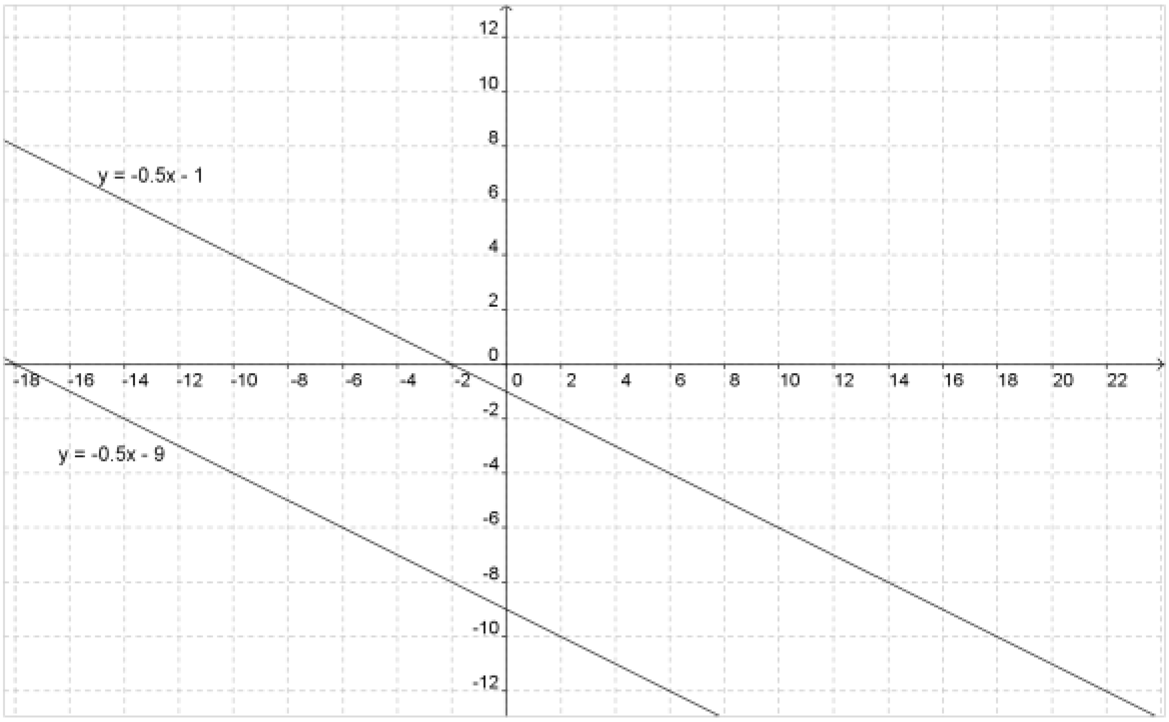
Ábrázoljuk az egyenletek y-ra való rendezésével kapott függvényeket!

I. $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = -6$

$$y = -\frac{1}{2}x - 9$$

II. $x + 2y = -2$

$$y = -\frac{1}{2}x - 1$$



A két függvény grafikonja nem metszi egymást (párhuzamos), ezért nincs megoldása az egyenletrendszernek.

4. feladat

$$\left.\begin{array}{ll} I. & 4x + 5y = -8 \\ II. & 7x - 8y = 53 \end{array}\right\}$$

Hogy mikor melyik módszert használjuk, azt a célszerűség dönti el.
Első pillantásra nem könnyű megmondani, melyiket érdemes választani.
Ha viszont észrevesszük, hogy egyszerűen tudunk egyenlő együtthatókat létrehozni, akkor nincs nehéz dolgunk.
Szorozzuk meg az első (*I.*) egyenletet 7-tel, a másodikat (*II.*) 4-gyel!

$$\left.\begin{array}{ll} I. & 28x + 35y = -56 \\ II. & 28x - 32y = 212 \end{array}\right\}$$

Innen, már egyértelműen látható, hogy a feladatot az egyenlő együtthatók módszerével célszerű megoldani.

Vonjuk ki az első (*I.*) egyenletből a másodikat (*II.*)!

$$28x + 35y - (28x - 32y) = -56 - 212$$
$$28x + 35y - 28x + 32y = -268$$
$$67y = -268$$
$$y = -4$$

A kapott y értéket beírjuk a második (*II.*) egyenletbe.

$$7x - 8 \cdot (-4) = 53$$
$$7x + 32 = 53$$
$$7x = 21$$
$$x = 3$$

Ellenőrzés után látható, hogy az egyenletrendszer megoldása:
$x = 3;\ y = -4.$