Négyzetgyökös egyenletek

VIGYÁZZ, GYÖK, HAMIS GYÖK!

1. feladat

a)

Megoldás:

$$\sqrt{x} - 3 = 0 \qquad \textit{ÉT: } x \geq 0$$

$$\sqrt{x} = 3$$

Négyzetre emelve.

$$x = 9 \in \textit{ÉT}$$

Ellenőrzés:

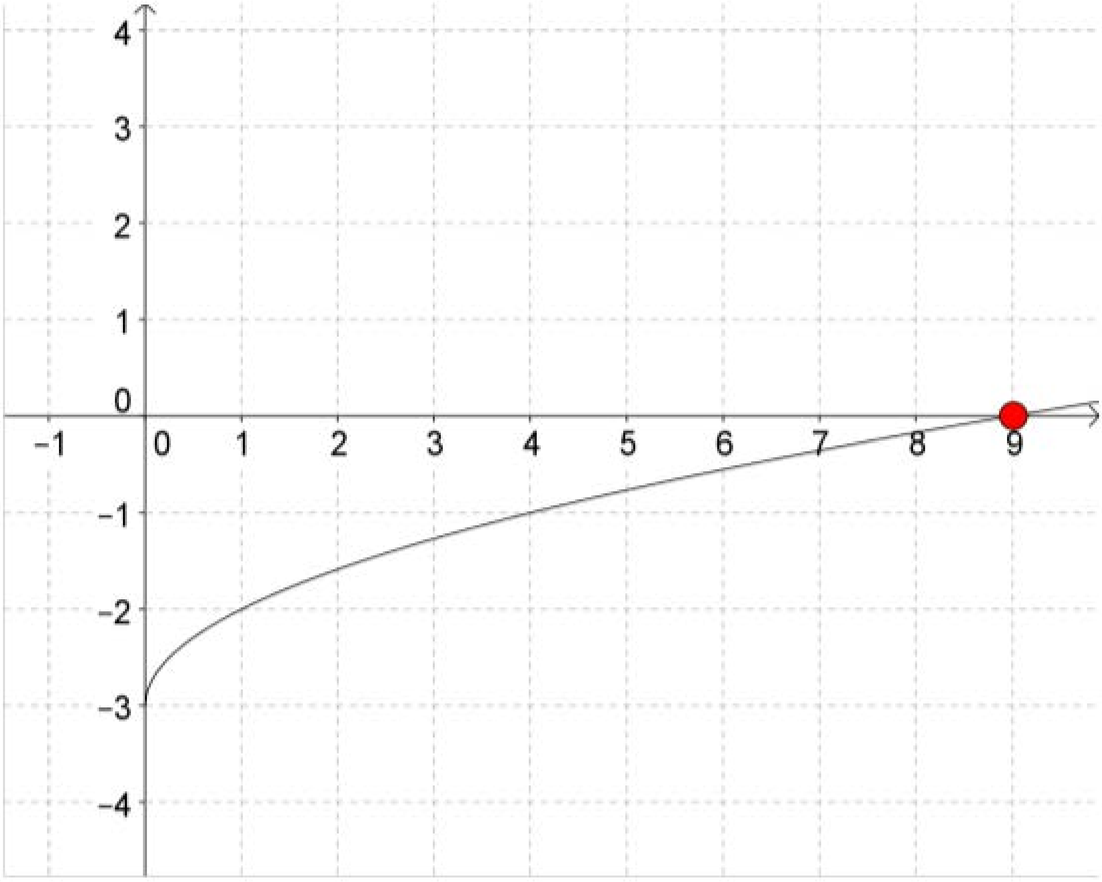
Ha $x = 9$:

$$\sqrt{9} - 3 = 0$$
$$3 - 3 = 0$$
$$0 = 0$$

A megoldás helyes.

Grafikus megoldás:

Azt keressük, hogy hol lesz az $f(x) = \sqrt{x} - 3$ $(x \geq 0)$ függvény értéke 0.



A függvény grafikonja alapján látható, hogy ez $x = 9$ esetén teljesül.

Ellenőrzés:

Ha $x = 9$

$$\sqrt{9} - 3 = 0$$
$$3 - 3 = 0$$
$$0 = 0$$

A megoldás helyes.

b)

Megoldás:

$$\sqrt{x+6}+1=0 \qquad\qquad x+6\geq 0$$

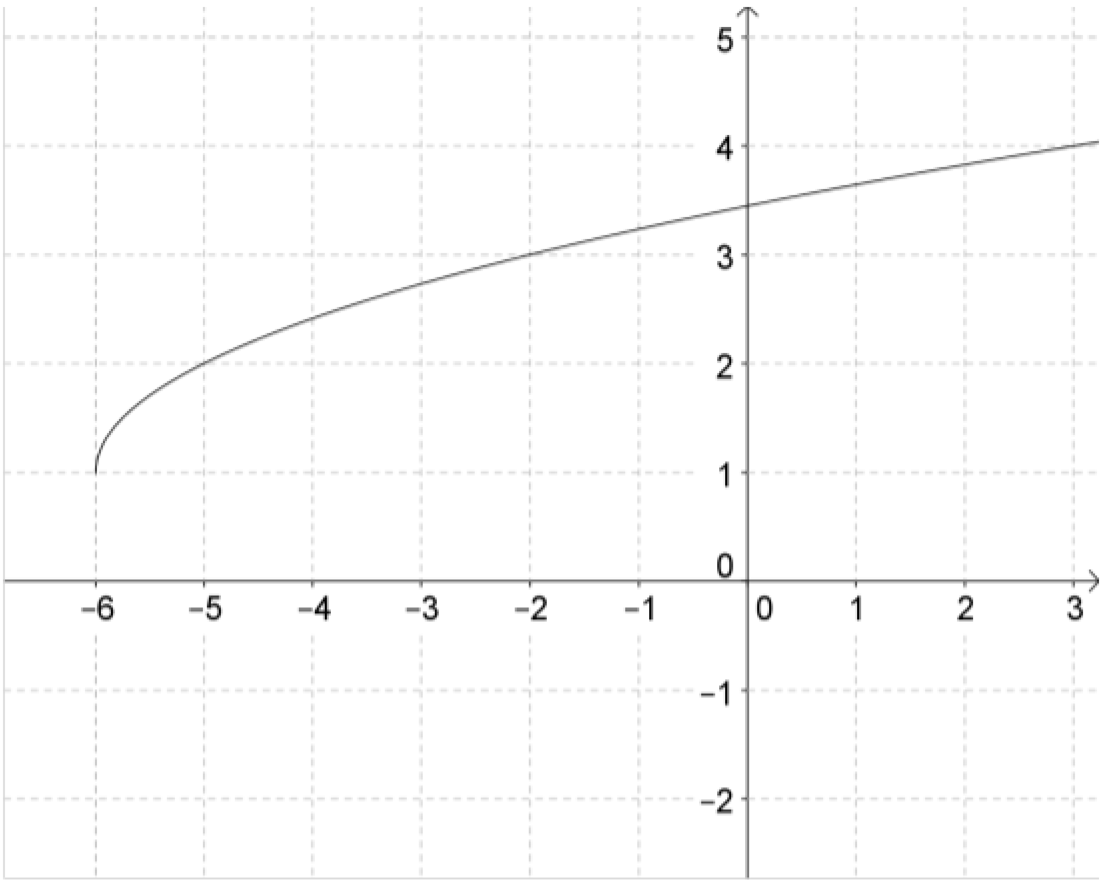
ÉT: $x\geq -6$

$$\sqrt{x+6}=-1$$

Nincs olyan x valós szám, amelynek a négyzetgyöke negatív, ezért nincs megoldása az egyenletnek.

Grafikus megoldás:

Azt keressük, hogy hol lesz az $f(x) = \sqrt{x+6} + 1 \ (x \geq -6)$ függvény értéke 0.



Nincs megoldás, mert a grafikonnak nincs pontja az x tengelyen.

c)

Megoldás:

$$\sqrt{x-5}=2 \qquad\qquad x-5\geq 0$$

ÉT: $x\geq 5$

Négyzetre emelve az egyenlet mindkét oldalát:

$$x-5=4$$

$$x=9$$

Ellenőrzés:

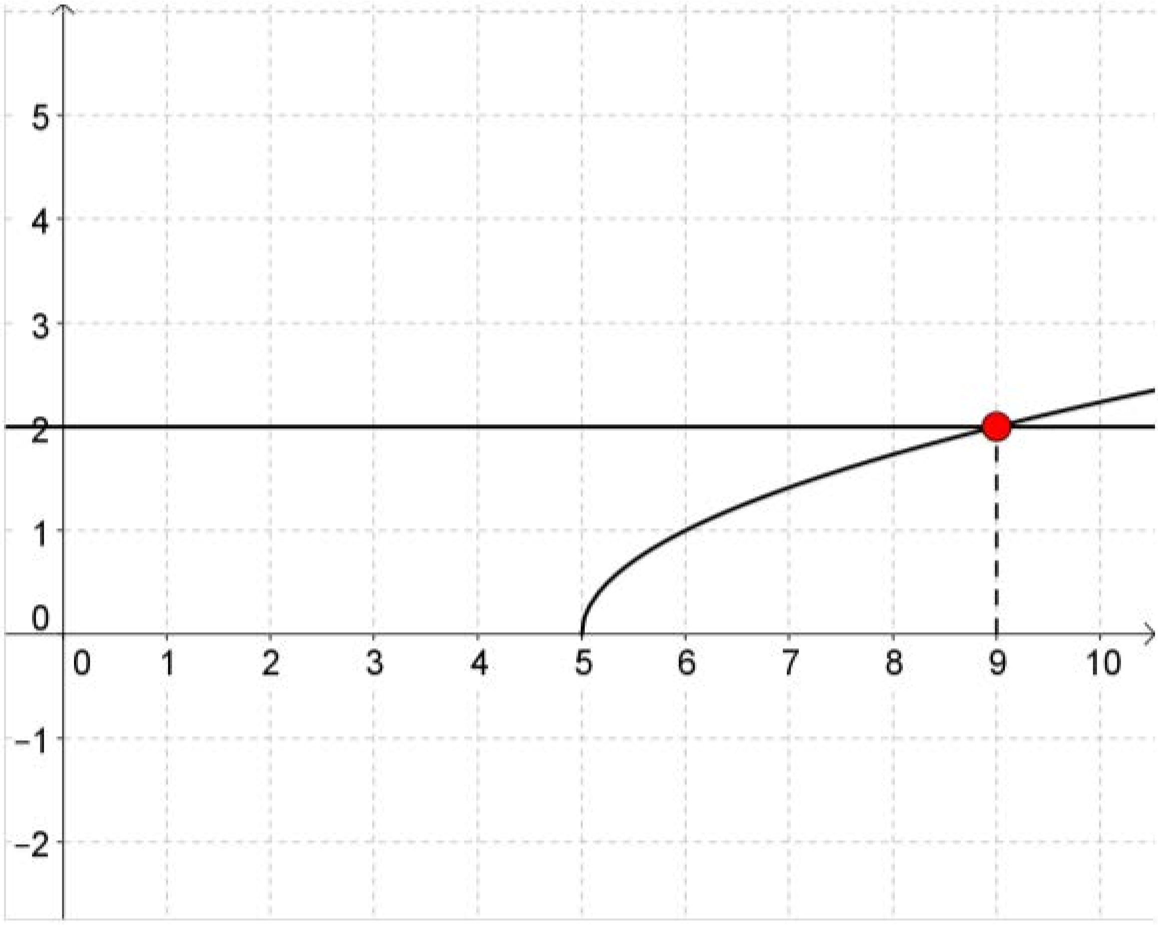
Ha $x=9$:

$$\sqrt{9-5}=2$$
$$\sqrt{4}=2$$
$$2=2$$

Tehát a 9 valóban megoldása az egyenletnek.

Grafikus megoldás:

Ábrázold közös koordináta-rendszerben az $f(x) = \sqrt{x-5}$ $(x \geq 5)$ és a $g(x) = 2$ függvényeket, majd keresd meg a grafikonok metszéspontját! Ennek első koordinátája adja az egyenlet megoldását (gyökét).



A függvények ábrázolása után látható, hogy a metszéspont első koordinátája 9, tehát az egyenlet $x = 9$ megoldás a 9 (ezt már ellenőriztük is).

d)

Megoldás:

$$\sqrt{x+4}+2x=2 \qquad\qquad \begin{aligned} x+4&\geq 0\\ x&\geq -4 \end{aligned}$$

$$\sqrt{x+4}=-2x+2 \qquad\qquad \begin{aligned} -2x+2&\geq 0\\ 2&\geq 2x\\ 1&\geq x \end{aligned}$$

ÉT: $-4 \leq x \leq 1$

Négyzetre emelés után:

$$\begin{aligned} x+4&=4x^2-8x+4\\ 0&=4x^2-9x\\ 0&=x\cdot(4x-9) \end{aligned}$$

$$x_1=0; \qquad x_2=\frac{9}{4}=2{,}25$$

Az *ÉT:* $-4 \leq x \leq 1$ miatt csak az $x_1=0$ megoldásra teljesülnek a feltételek.

Ellenőrzés:

Ha $x=0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{0+4}+2\cdot 0&=2\\ \sqrt{4}+0&=2\\ \sqrt{4}&=2\\ 2&=2 \end{aligned}$$

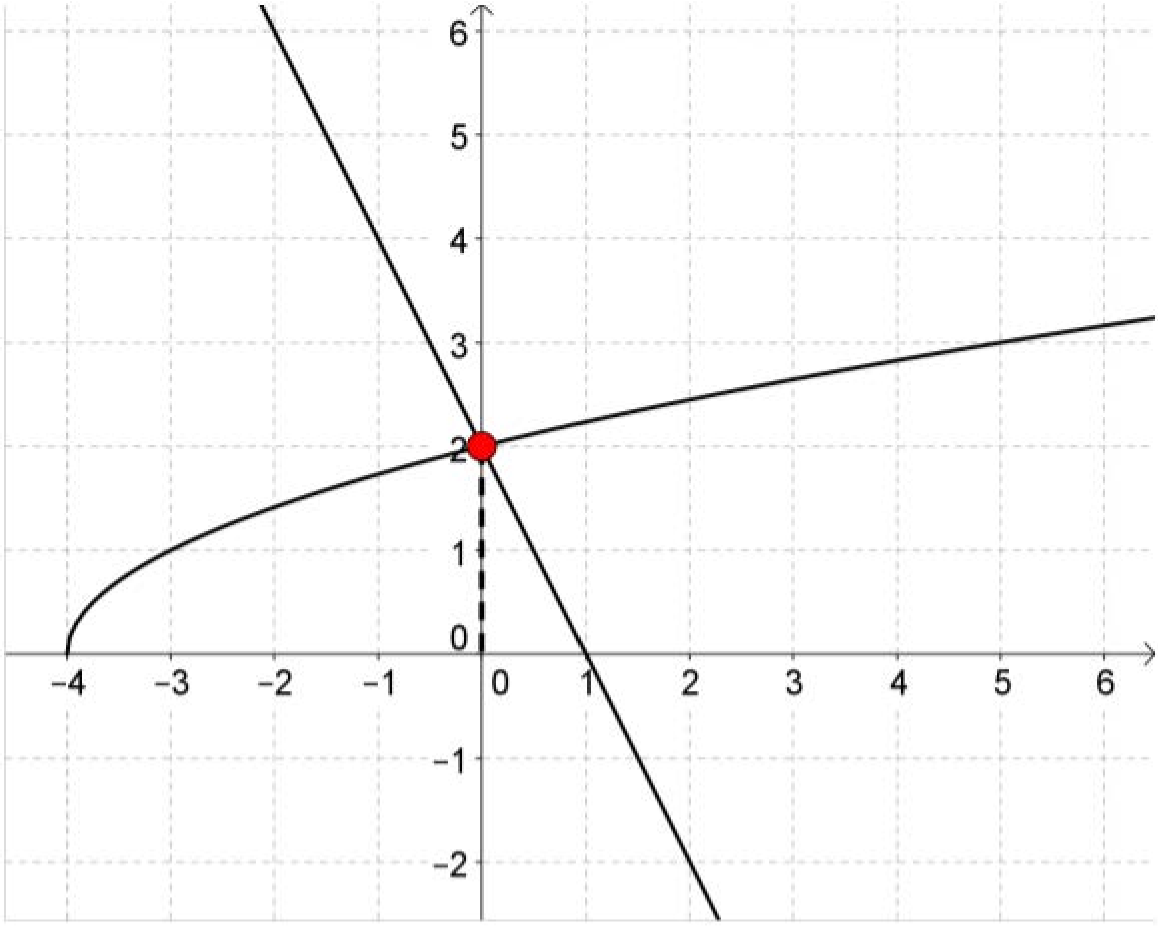
A megoldás helyes.

Grafikus megoldás:

Rendezve az egyenletet:

$$\sqrt{x+4} = -2x + 2$$

Ábrázold közös koordináta-rendszerben az $f(x) = \sqrt{x+4}$ $(x \geq -4)$ és a $g(x) = -2x + 2$ függvényeket, majd keresd meg a metszéspontjukat!



A függvények ábrázolása után látható, hogy $x = 0$ az egyenlet megoldása a 0(ezt már ellenőriztük is).

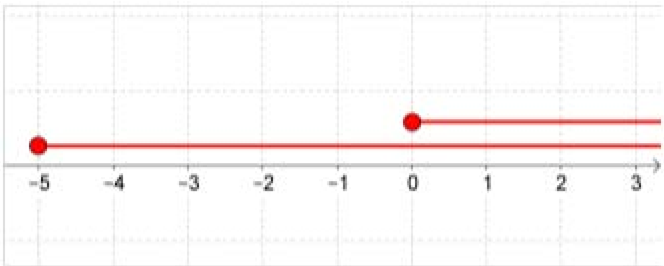
e)

Megoldás:

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$$

Látható, hogy az egyenlet értelmezési tartománya a nem negatív valós számok halmaza (hiszen a $\sqrt{x}$ miatt $x \geq 0$).

$$x+5 \geq 0 \quad \text{és} \quad x \geq 0$$
$$x \geq -5 \quad \text{és} \quad x \geq 0$$



$$x \geq 0$$

Rendezd az egyenletet úgy, hogy a bal oldalon egyedül maradjon a $\sqrt{x+5}$!

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$$
$$\sqrt{x+5}=\sqrt{x}+1$$

Mindkét oldal nemnegatív, a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.

$$x+5=x+2\cdot\sqrt{x}\cdot 1+1$$

Ezt a megmaradt négyzetgyökre kell rendezni.

$$x+5=x+2\cdot\sqrt{x}+1$$
$$4=2\cdot\sqrt{x}$$
$$2=\sqrt{x}$$

$$x=4 \in \acute{E}T$$

Ellenőrzés:

Ha $x = 4$:

$$\sqrt{4+5} - \sqrt{4} = 1$$
$$\sqrt{9} - \sqrt{4} = 1$$
$$3 - 2 = 1$$
$$1 = 1$$

A megoldás helyes.

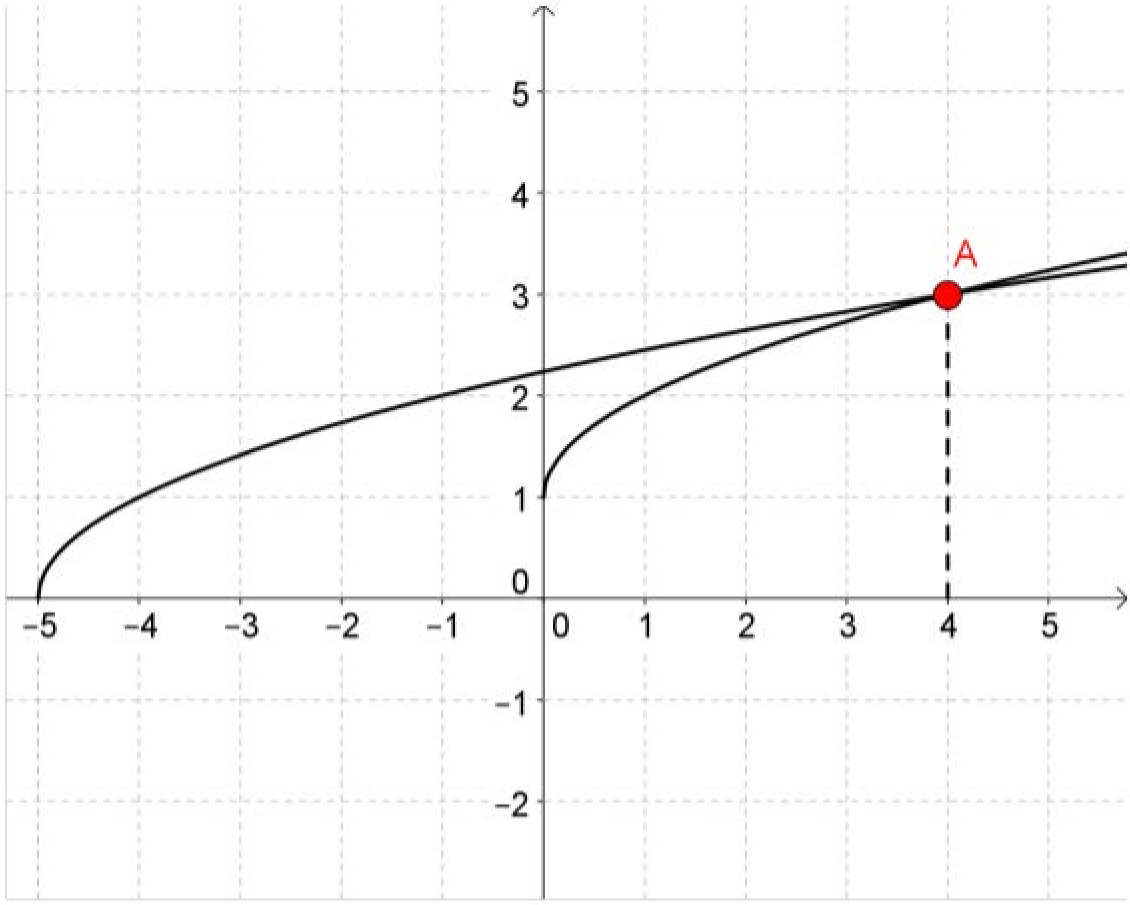
Grafikus megoldás:

Rendezd úgy az egyenletet, hogy egy oldalon csak egy gyök szerepeljen!

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$$

$$\sqrt{x+5}=\sqrt{x}+1$$

Ábrázold közös koordináta-rendszerben az $f(x)=\sqrt{x+5}$ $(x \geq -5)$ és a $g(x)=\sqrt{x}+1$ $(x \geq 0)$ függvényeket, majd keresd meg a metszéspontjukat!



A függvények ábrázolása után látható, hogy a metszéspont az $x=4$ értéknél van. A megoldás tehát a 4 (ezt már ellenőriztük is).