Másodfokú egyenlőtlenségek

MELYIK A NAGYOBB?

1. feladat

a) Megoldás mérlegelvvel:

$$x^2 - 9 > 0$$

$$x^2 > 9$$

$$\sqrt{x^2} > \sqrt{9}$$

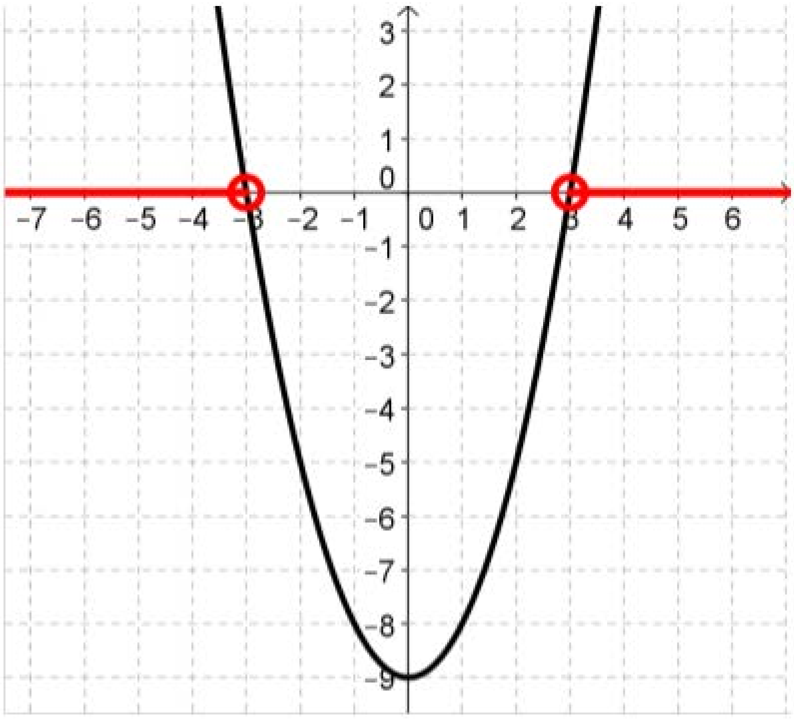
$$|x| > 3$$

Megoldás:

$$x < -3 \quad \text{vagy} \quad 3 < x$$

b) Megoldás grafikus módszerrel:

Az $x \mapsto x^2 - 9$ másodfokú függvényt ábrázolva leolvasható az ábráról, hogy a függvény $x < -3$, illetve $3 < x$ helyeken vesz fel pozitív értéket, ezért az egyenlőtlenség megoldása $x < -3$ vagy $3 < x$.



c) Megoldás szorzattá alakítással:

Az $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$ nevezetes szorzat segítségével alakítsuk szorzattá az egyenletet!

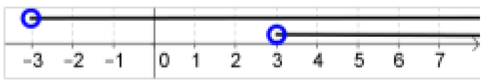
$$x^2 - 9 > 0$$

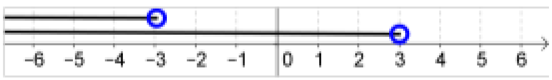
$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3) \cdot (x-3) > 0$$

$$(x+3) \cdot (x-3) > 0$$

A szorzat akkor lesz pozitív, ha mindkét tényező előjele megegyezik. Ezért azt kell vizsgálni, mikor lesz az $(x+3) \cdot (x-3)$ szorzat mindkét tényezője egyszerre pozitív, illetve negatív. Ha a két eset megoldásait számegyenesen ábrázoljuk, az egyenlőtlenség megoldása könnyen leolvasható.

1. eset (mindkettő pozitív)		2. eset (mindkettő negatív)
$x + 3 > 0$ és $x - 3 > 0$	vagy	$x + 3 < 0$ és $x - 3 < 0$
$x > -3$ és $x > 3$	vagy	$x < -3$ és $x < 3$





Megoldás: az összes valós szám, amelyre $x < -3$ vagy $3 < x$.

2. feladat

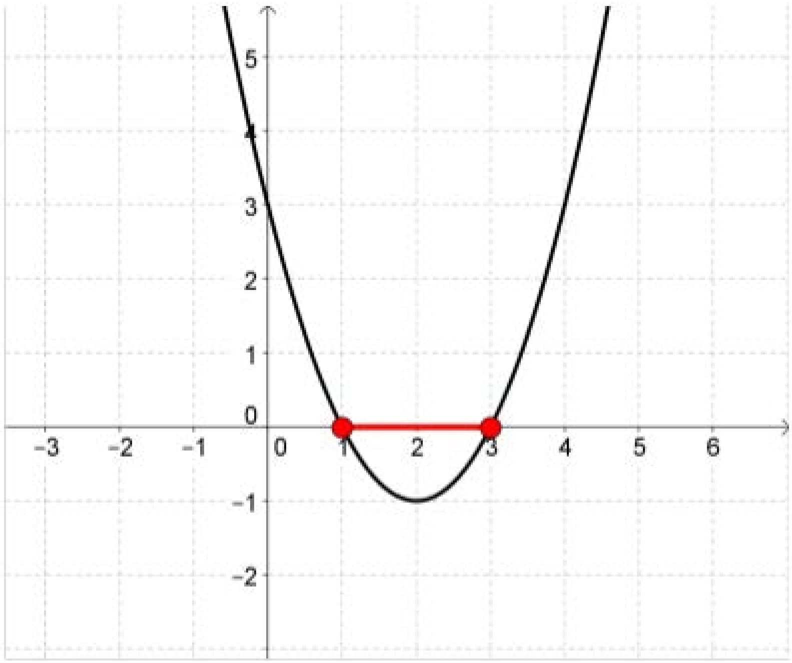
Az egyenlőtlenséget rendezzük 0-ra, majd megoldóképlettel kiszámítjuk az $x \mapsto x^2 - 4x + 3$ függvény zérushelyeit.

$$x^2 \leq 4x - 3$$
$$x^2 - 4x + 3 \leq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1$$

$$x_1 = 1; \qquad x_2 = 3$$

A másodfokú tag együtthatója pozitív, így a parabola felfelé nyitott.



A függvény nulla vagy negatív értéket az $[1;\ 3]$ intervallumon vesz fel, így a megoldások a következők:

a) A valós számok halmazán az $[1;\ 3]$ intervallum.

b) Az egész számok halmazán az $x \in \{1; 2; 3\}$ számok.

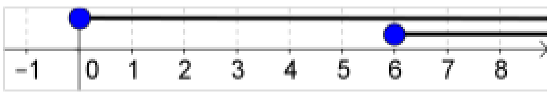
3. feladat

Emeljünk ki x-et az $x^2 - 6x$ kifejezésből, majd vizsgáljuk meg számegyenes segítségével, mikor lesz a szorzat nagyobb vagy egyenlő, mint 0!

$$x^2 - 6x = x \cdot (x - 6) \geq 0$$

1. eset (mindkettő ≥ 0)

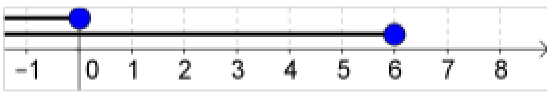
$x \geq 0$ és $x - 6 \geq 0$
$x \geq 0$ és $x \geq 6$



vagy

2. eset (mindkettő ≤ 0)

vagy $x \leq 0$ és $x - 6 \leq 0$
vagy $x \leq 0$ és $x \leq 6$



Megoldás: az összes valós szám, amelyre $x \leq 0$ vagy $x \geq 6$.

4. feladat

Ezt a feladatot grafikusan érdemes megoldani, ehhez rendezzük 0-ra az egyenlőtlenséget!

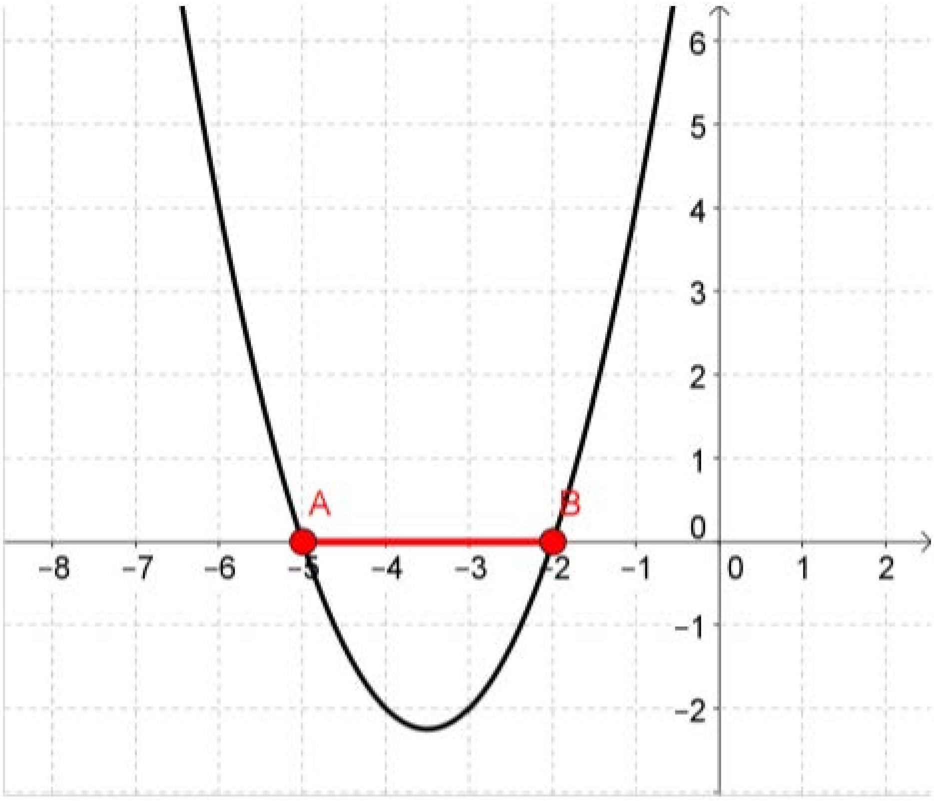
$$2x^2 + 5x + 10 \leq x^2 - 2x$$

$$x^2 + 7x + 10 \leq 0$$

Számoljuk ki, melyek az $x \mapsto x^2 + 7x + 10$ függvény zérushelyei, majd ábrázoljuk a függvény grafikonját!

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -2; \qquad x_2 = -5$$



Az egyenlőtlenség megoldása: az összes valós szám, amelyre $-5 \leq x \leq -2$.