Magasabb fokú egyenletek megoldása

NAGYBÓL KICSI

1. feladat

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

1. Új ismeretlen bevezetése:

   Helyettesítsük be az x^2 helyére az y-t.

   Így az $y^2 - 13y + 36 = 0$ egyenletet kapjuk, amelyet megoldunk.

2. A redukált egyenlet megoldása:

$$y_{1,2} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

$$y_1 = 9; \qquad y_2 = 4$$

   Ezeket az eredményeket visszahelyettesítve, majd gyököt vonva megkapjuk az eredeti egyenlet megoldásait.

3. Az eredeti egyenlet gyökei:

$$x^2 = 9 \qquad \text{illetve} \qquad x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{9} \qquad\qquad x = \pm\sqrt{4}$$

$$x_1 = 3;\ x_2 = -3; \qquad x_3 = 2;\ x_4 = -2$$

Az egyenletnek tehát négy megoldása van: −3; −2; 2; 3.

4. Ellenőrzés:

$x = 2$ esetén:

$2^4 - 13 \cdot 2^2 + 36 = 16 - 13 \cdot 4 + 36 = 16 - 52 + 36 = 0$, tehát a megoldás helyes.

$x = -2$ esetén:

$(-2)^4 - 13 \cdot (-2)^2 + 36 = 16 - 13 \cdot 4 + 36 = 16 - 52 + 36 = 0$, tehát a megoldás helyes.

$x = 3$ esetén:

$3^4 - 13 \cdot 3^2 + 36 = 81 - 13 \cdot 9 + 36 = 81 - 117 + 36 = 0$, tehát a megoldás helyes.

$x = -3$ esetén:

$(-3)^4 - 13 \cdot (-3)^2 + 36 = 81 - 13 \cdot 9 + 36 = 81 - 117 + 36 = 0$, tehát a megoldás helyes.

b) $2x^6 + 4x^3 - 6 = 0$

1. Új ismeretlen bevezetése:

   Az egyenletet kettővel lehet egyszerűsíteni, ami megkönnyíti a számolást. (Amennyiben ezt nem vetted észre, az sem gond, csak nagyobb számokkal kellett dolgoznod.)

   Így az $x^6 + 2x^3 - 3 = 0$ egyenletet kapjuk.

   Az egyenletbe az $x^3 = y$-t behelyettesítve az $y^2 + 2y - 3 = 0$ egyenletet kapjuk.

2. A redukált egyenlet megoldása:

$$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = -1 \pm 2$$

$$y_1 = 1\,; \qquad y_2 = -3$$

   Ezeket az eredményeket visszahelyettesítve az $x^3 = y$ egyenletbe, majd köbgyököt vonva megkapjuk az eredeti egyenlet gyökeit.

3. Az eredeti egyenlet gyökei:

$$x^3 = 1 \qquad \text{illetve} \qquad x^3 = -3$$

$$x = \sqrt[3]{1} \qquad\qquad x = \sqrt[3]{-3}$$

$$x_1 = 1; \qquad\qquad x_2 = \sqrt[3]{-3}$$

   Így az eredeti egyenlet gyökei: $\sqrt[3]{-3}$ és 1.

4. Ellenőrzés:

$x = 1$ esetén:

$1^6 + 2 \cdot 1^3 - 3 = 1 + 2 \cdot 1 - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$, tehát a megoldás helyes.

$x = \sqrt[3]{-3}$ esetén:

$\left(\sqrt[3]{-3}\right)^6 + 2 \cdot \left(\sqrt[3]{-3}\right)^3 - 3 = (-3)^2 + 2 \cdot (-3)^1 - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$, tehát a megoldás helyes.

c) $(x+2)^4 - 3\cdot(x+2)^2 - 4 = 0$

1. Új ismeretlen bevezetése:

   Legyen az új ismeretlen $y = (x+2)^2$, így az $y^2 - 3y - 4 = 0$ egyenletet kapjuk.

2. A redukált egyenlet megoldása:

$$y_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$y_1 = 4; \qquad y_2 = -1$$

   Ezeket az eredményeket visszahelyettesítve az $y = (x+2)^2$ egyenletbe, megkapjuk az eredeti egyenlet megoldásait.

3. Az eredeti egyenlet gyökei:

$$(x+2)^2 = 4 \qquad \text{illetve} \qquad (x+2)^2 = -1$$

$$x + 2 = \pm\sqrt{4}$$
$$x + 2 = \pm 2$$
$$x = -2 \pm 2$$

Az egyenletnek nincs megoldása, mert nem létezik olyan valós szám, amelynek a négyzete negatív lenne.

$$x_1 = 0;\ x_2 = -4$$

Így az eredeti egyenlet gyökei: -4 és 0.

4. Ellenőrzés:

$x = 0$ esetén:

$(0+2)^4 - 3 \cdot (0+2)^2 - 4 = 2^4 - 3 \cdot 2^2 - 4 = 16 - 3 \cdot 4 - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$, tehát a megoldás helyes.

$x = -4$ esetén:

$(-4+2)^4 - 3 \cdot (-4+2)^2 - 4 =$
$= (-2)^4 - 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 16 - 3 \cdot 4 - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$, tehát a megoldás helyes.