A hatványozás azonosságai

1. feladat

1. $3^4 \cdot 3^3 =$ általánosan: $a^n \cdot a^m =$

$$3^4 \cdot 3^3 = (\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4}) \cdot (\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{3}) = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4+3=7} = 3^{4+3} = 3^7$$

általánosan: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$$a^n \cdot a^m = \left(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\,db}\right) \cdot \left(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\,db}\right) = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m\,db} = a^{n+m}$$

ahol, $a \in R; n, m \in Z;\ (0^0: nem\ értelmezzük)$

Azonos alapú hatványok szorzatát megkapjuk, ha az alapot a kitevők összegére emeljük.

2. $\frac{3^2}{3^4} =$ általánosan: $\frac{a^n}{a^m} =$

$$\frac{3^2}{3^4} = \frac{\overbrace{3 \cdot 3}^{2}}{\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4}} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$$

általánosan: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n\ darab}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ darab}} = a^{n-m}$$

ahol, $a \in R; a \neq 0;\ n, m \in Z$

Azonos alapú hatványok hányadosát megkapjuk, ha az alapot a kitevők különbségére emeljük.

3. $(3^{-2})^3 =$ általánosan: $(a^n)^k =$

$$(3^{-2})^3 = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^3 = \left(\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}_{2}\right)^3 = \overbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}_{2}\right)\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}_{2}\right)\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}_{2}\right)}^{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 3^{-6}$$

általánosan: $(a^n)^k = a^{n\cdot k}$

$$(a^n)^k = \underbrace{a^n\cdot a^n\cdot\ldots\cdot a^n}_{k\ db} =$$

$$= \overbrace{\left(\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ db}\right)\cdot\left(\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ db}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ db}\right)}^{k\ db} = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\cdot k\ db} = a^{n\cdot k}$$

ahol, $a \in R; n, k \in Z;\ (0^0: nem\ értelmezzük)$

Hatványt úgy hatványozunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.

4. $(3 \cdot 5)^3 =$ általánosan: $(a \cdot b)^n =$

$$(3 \cdot 5)^3 = \underbrace{(3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5)}_{3} = \left(\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{3}\right) \cdot \left(\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3}\right) = 3^3 \cdot 5^3$$

általánosan: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$$a \cdot b^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n\ db} = \left(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ db}\right) \cdot \left(\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n\ db}\right) = a^n \cdot b^n$$

ahol, $a, b \in R; n \in Z;\ (0^0: nem\ értelmezzük)$

Szorzatot úgy hatványozunk, hogy minden tényezőt külön hatványozunk.

5. $\left(\frac{4}{7}\right)^2 =$ általánosan: $\left(\frac{a}{b}\right)^n =$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \underbrace{\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}}_{2} = \frac{\overbrace{4\cdot 4}^{2}}{\underbrace{7\cdot 7}_{2}} = \frac{4^2}{7^2} = \frac{16}{49}$$

általánosan: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\,db} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\,db}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\,db}} = \frac{a^n}{b^n}$$

ahol, $a, b \in R; b \neq 0;\ n \in Z;\ (0^0: nem\ értelmezzük)$

Törtet úgy hatványozunk, hogy külön hatványozzuk a számlálót és külön a nevezőt.